L'insegnamento apprendimento del *Calculus* e le nuove tecnologie[1]: una rivoluzione a portata di mano

Domingo Paola

Riassunto

Le tecnologie oggi disponibili rendono possibile trattare, prima del completamento della scuola dell'obbligo, nozioni di fondamentale importanza nella preparazione matematica di base, ossia quei concetti che consentono di interpretare e studiare variazioni di grandezze. Non si tratta, però, semplicemente di affrontare con nuove metodologie le idee che soggiacciono al *Calculus*, considerandole come fondamentali nei curricoli scolastici e anticipandole: si tratta, soprattutto, di riformularle profondamente, perseguendo la costruzione di un nuovo alfabeto per la matematica delle grandezze che variano. In questo articolo si propongono alcune modalità di utilizzazione dei software Ti – Interactive!, Java Math Worlds e Graphic Calculus per creare ambienti di insegnamento – apprendimento finalizzati all'acquisizione dei concetti fondamentali del *Calculus* a partire dalle loro radici cognitive.

Abstract

The currently available new technologies make possible the treatment of fundamental mathematics concepts, like the interpretation and study of quantities and variation, before the end of the compulsory school cycle. with this respect, the focus should not only be on the development of new methods for teaching the same fundamental ideas at the basis of calculus, as established in the school curriculum since the beginning of the secondary school cycle; what is needed is a reformulation of these ideas, aiming at the construction of a new language for the mathematics related to the variation of quantities. This paper will discuss some examples of teaching and learning environments that make use of Ti-Interactive!, Java Math Worlds and Graphic Calculus with the aim of teaching the fundamental concepts of calculus on the basis of their cognitive roots.

Domingo Paola

Liceo scientifico Issel di Finale Ligure
G.R.E.M.G. Dipartimento di Matematica Università di Genova
domingo.paola@tin.it

---

[1] Alcune considerazioni contenute in questo articolo, in particolare quelle relative all'uso di TI Interactive! per l'insegnamento – apprendimento del *Calculus*, sono state da me presentate in una relazione plenaria al convegno ADT 2004 a Vietri sul Mare. L'uso del termine anglosassone *Calculus*, in luogo di *Analisi matematica*, è voluto e suggerisce la propensione dell'autore per un approccio pragmatico ed essenziale allo studio delle grandezze che variano.

Premessa

L'insegnamento – apprendimento del *Calculus*, prima dell'avvento delle nuove tecnologie, era concentrato sull'acquisizione di tecniche di manipolazione simbolica per la differenziazione e l'integrazione con l'aggiunta, ove opportuno e utile, di illustrazioni statiche di grafici. Le nuove tecnologie hanno messo a disposizione grafici dinamici, manipolabili dallo studente, per aiutare nella comprensione dei concetti[2]. Per esempio, utilizzando funzioni come gli Zoom, presenti in ogni calcolatrice, è possibile evidenziare l'eventuale linearità locale di un grafico; in seguito, utilizzando la funzione Trace, oppure trascinando un punto con il mouse sul grafico della funzione o, ancora, muovendo lungo il grafico un segmentino che congiunge due punti abbastanza vicini, lo studente può vedere dinamicamente come cambia la pendenza delle tangenti lungo il grafico e quindi può pensare alla pendenza delle tangenti al grafico come a una vera e propria funzione (Piez, Smith, & Tall, in preparazione).

In tal modo è possibile, con opportune riformulazioni e ristrutturazioni degli argomenti proposti, avviare al *Calculus* già dai primi anni della scuola secondaria, consentendo a tutti gli studenti di entrare in contatto con concetti assai importanti nell'attuale società; le nuove tecnologie possono aiutare sia nell'approccio formale, sia in quello grafico – visivo, anche se, forse, è proprio in questo secondo approccio che evidenziano le maggiori potenzialità.

In questo lavoro propongo alcune riflessioni su come le nuove tecnologie, in particolare i software TI InterActive!, Graphic Calculus e Java Math Worlds consentano di costruire ambienti di insegnamento – apprendimento finalizzati all'acquisizione dei concetti fondamentali del *Calculus* a partire dalle loro radici cognitive, educando, in particolare, a un'intuizione visiva utile per creare un terreno fertile sul quale seminare e far germogliare significati che contribuiranno a rendere *sensato*[3] l'approccio formale, quando e se verrà proposto.

---

[2] Alcune proposte interessanti e intelligenti sono state avanzate da Michele Impedovo nell'articolo Computer algebra e calcolo infinitesimale pubblicato sul n.1 dell'anno 2000 della rivista *La Matematica e la sua didattica* e disponibile in rete all'indirizzo web: http://www.matematica.it/impedovo/articoli/Computer%20algebra%20e%20calcolo%20infinitesimale.pdf

[3] L'aggettivo *sensato* viene utilizzato nell'accezione galileiana, per evidenziare sia aspetti legati ai sensi e all'esperienza, sia aspetti legati alla ragione e alla teoria.

Radici cognitive e concetti fondamentali nell'insegnamento – apprendimento del *Calculus*

L'individuazione dei concetti e delle tecniche che si considerano fondamentali nell'insegnamento – apprendimento del *Calculus* è operazione assai importante, se non addirittura premessa necessaria per una discussione sensata e consapevole sui limiti e sulle potenzialità di un ambiente di insegnamento – apprendimento per il *Calculus*. Ecco perché, prima di discutere l'adeguatezza di determinati software, penso sia necessario precisare quelli che ritengo essere i nodi concettuali dell'insegnamento – apprendimento del *Calculus* nella scuola secondaria[4]. A mio avviso essi possono essere essenzialmente ricondotti ai seguenti quattro concetti:

a) funzione
b) linearità locale
c) continuità
d) relazioni tra derivazione e integrazione espresse con il teorema fondamentale del calcolo.

C'è però un altro aspetto che a me sembra importante considerare per studiare l'efficacia dei software per l'insegnamento – apprendimento del *Calculus*: quello delle radici cognitive su cui si fondano questi concetti. Secondo Tall (DeMarois, McGowen & Tall, 2000), una radice cognitiva è un concetto che:

a) costituisce un insieme significativo di informazioni che si possono considerare unitariamente, con tutte le loro relazioni con le altre parti della struttura cognitiva;
b) costituisce un nucleo importante di conoscenza per uno studente che si appresta a iniziare un'attività di apprendimento;
c) consente un'evoluzione dell'apprendimento attraverso strategie di estensione e generalizzazione della conoscenza, piuttosto che non attraverso ristrutturazioni e riorganizzazioni della rete concettuale;
d) rende possibile la costruzione di significati che durano a lungo, nell'evoluzione del processo di apprendimento;
e) è abbastanza solido e resistente da rimanere utile anche quando si sviluppano conoscenze più sofisticate.

---

[4] Per tutto quello che esprimo in particolare in questo paragrafo, le fonti di ispirazione principale, sia esplicite, sia implicite, sono le idee di David Tall, ricercatore all'Università di Warwick che si occupa da molti anni di ricerca in educazione matematica, in particolare per quel che riguarda il *Calculus*. Le lettrici e i lettori che desiderino prendere visione direttamente delle idee di Tall possono collegarsi al sito http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/ dove si trovano moltissimi suoi lavori scaricabili dalla rete.

È chiara, da quanto detto, l'importanza delle radici cognitive: se un concetto oggetto di attività di insegnamento – apprendimento trova il suo fondamento su solide radici cognitive, l'apprendimento e l'insegnamento non possono che essere favoriti e risultare veramente significativi.
Io sono convinto che ciascuno dei nodi concettuali prima elencati si fondi su una ben precisa radice cognitiva: per quello che riguarda il concetto di funzione, mi limito a dire che il suo significato può essere costruito osservando grandezze che variano, in particolare rispetto al tempo. Per un'analisi più approfondita e per la discussione di un percorso didattico rimando a (Paola, 2003). Qui vorrei discutere le radici cognitive degli altri tre nodi concettuali prima elencati.
In particolare ritengo che il concetto di linearità locale possa essere fondato su quello di "rettificazione locale" o "microlinearità", ossia la proprietà che hanno i grafici di certe funzioni di ridursi a una retta quando si effettuano successivi ingrandimenti centrati in un punto. La "rettificazione locale" può diventare una radice cognitiva grazie ai comandi di Zoom, oggi disponibili in un qualunque software grafico.
Ritengo che il concetto di continuità abbia, come corrispondente percettivo – intuitivo, quello di "appiattimento del grafico di una funzione", ossia la proprietà che hanno i grafici delle funzioni continue di confondersi con un segmento orizzontale quando vengano stirati orizzontalmente. Anche tale concetto, sul quale ritornerò in seguito, è passibile di diventare una radice cognitiva con un opportuno uso delle risorse messe a disposizione dai software grafici.
Ritengo, infine, che le relazioni tra derivazione e integrazione, espresse con il teorema fondamentale del calcolo, possano essere fondate sulle radici cognitive di area sottesa al grafico di una funzione e di "appiattimento del grafico di una funzione".
Naturalmente è possibile fare riferimento anche ad altre radici cognitive, per esempio lavorando con e su grandezze cinematiche: la velocità media in intervalli sempre più brevi di tempo per avere informazioni su quanto velocemente varia la posizione nel tempo può fungere da radice cognitiva per il concetto di linearità locale. La continuità, nel lavoro con le grandezze che variano nel tempo, è invece insita nelle esperienze effettuabili, per esempio con i sensori di posizione. Per quel che riguarda il teorema fondamentale del calcolo, le radici cognitive sono nella descrizione dei cambiamenti di una quantità nei due termini di tassi di crescita (quanto velocemente cresce?) e di ammontare totale (quanto è cresciuta?) che il teorema del calcolo afferma essere equivalenti.

Nel seguito di questo lavoro presenterò e discuterò alcuni esempi di utilizzazione di alcuni software per introdurre i concetti fondamentali del *Calculus* a partire da alcune loro radici cognitive che è possibile mettere a disposizione degli studenti proprio grazie all'uso di certe funzioni specifiche dei software. I software che prenderò in considerazione funzionano da *generic organizer* (Tall, 1989), ossia da ambienti di insegnamento – apprendimento che mettono in condizione chi apprende di fare esperienza di oggetti matematici, esplorando situazioni significative, che propongono diversi esempi e controesempi e sui quali chi apprende può lavorare imparando per tentativi ed errori.
L'approccio è essenzialmente di tipo percettivo – motorio, sia per radicare l'apprendimento di concetti formali e raffinati in esperienze che hanno un naturale significato per lo studente, sia per aiutare la formazione di un pensiero formale che possa caricare di nuovi significati quelle idee fondate su esperienze prettamente sensoriali o grafico – visive. Si tratta di una ristrutturazione dell'approccio tradizionale, resa possibile dall'esistenza e dallo sviluppo di nuove tecnologie. Grazie a esse, oggi, un approccio integrato (numerico – algoritmico, visivo – percettivo e formale) è davvero possibile, tenendo ben presente che i tre approcci hanno anche differenti modalità per garantire la conoscenza: in un caso si calcola, nell'altro si vede, nel terzo di dimostra.

Il software TI InterActive! e l'avvio al *Calculus*

TI InterActive! è un software matematico che riunisce in un'unica applicazione funzionalità messe a disposizione da diversi prodotti: non è solo un software di manipolazione numerica, grafica e simbolica, ma consente di costruire ed eseguire fogli di lavoro interattivi, grazie all'elaboratore di testi, al foglio elettronico e alla funzionalità di gestione delle animazioni che mette a disposizione dell'utente. Inoltre, grazie al browser di cui dispone, dà la possibilità di navigare in rete; è quindi un ambiente non chiuso, che può permettere di importare dati da vari altri ambienti, in particolare, dalle calcolatrici grafico – simboliche della Texas Instrument.
Le modalità di utilizzazione di TI InterActive! sono molteplici: può essere usato come "lavagna" per rendere più efficaci e dinamiche le lezioni frontali, oppure per progettare e costruire esercitazioni che gli studenti potranno poi affrontare in piccoli gruppi di lavoro. A mio avviso la modalità di utilizzazione più innovativa e significativa è quella relativa alla costruzione di schede di lavoro che propongano attività di esplorazione, favoriscano la produzione di

congetture motivando alla loro validazione e richiedano, infine, la sistemazione, da parte degli studenti stessi con l'ausilio dell'insegnante, delle conoscenze e delle tecniche apprese o consolidate durante il lavoro. Grazie al lavoro svolto nei piccoli gruppi e alle discussioni matematiche guidate dall'insegnante alla presenza dell'intera classe, le schede progettate dal docente dovrebbero diventare capitoli di una teoria che, gradualmente, riesca a organizzare e sistemare conoscenze e tecniche oggetto di studio.

Per imparare a utilizzare il software e diventare in breve tempo autosufficienti nell'esplorare le varie potenzialità, suggerisco uno dei due seguenti ottimi manuali introduttivi:

Friedrich Tinhof, *Introduzione a TI InterActive!* (traduzione italiana a cura di Sergio Invernizzi), 2004, Media Direct (103 pagine, costo € 13,50).

AAVV, *TI Inter Active! in the classroom* (in lingua inglese), 2004, T^3 Europe (148 pagine con CD di lezioni interattive allegato, s.i.p., ma è possibile scaricare gratuitamente il libro in formato pdf collegandosi all'indirizzo http://www.t3ww.org/pdf/TII.pdf).

Per avere indicazioni sul costo di TI InterActive!, conviene collegarsi al sito http://www.campustore.it/ e digitare TI InterActive! nella casella apposita e poi avviare il motore di ricerca. I costi attuali sono mediamente contenuti, ma non irrilevanti: vanno dai 50 euro per il costo di una licenza individuale ai 1440 euro per una licenza illimitata (è possibile consegnare a ogni studente della scuola una licenza del software da utilizzare non solo a scuola, ma anche casa), passando per i 600 euro di una licenza site (è possibile installare il software su qualunque computer della scuola).

Nel prosieguo vorrei presentare alcune attività di avvio al *Calculus* con TI InterActive! che io, in genere, propongo già nel biennio di un corso di liceo scientifico sperimentale. La presentazione e la discussione di tali attività dovrebbero consentire di approfondire e precisare quanto detto precedentemente in relazione ai concetti fondamentali del *Calculus* e alle loro radici cognitive.

Dalla "rettificazione locale" alla linearità locale con TI – InterActive!

Sebbene le due nozioni di linearità locale e di "rettificazione locale" siano matematicamente equivalenti, dal punto di vista cognitivo esse sono molto diverse. La "rettificazione locale", ossia il fenomeno per il quale il grafico di certe funzioni appare come una retta se si fa un numero opportuno di ingrandimenti intorno ad alcuni punti, è un concetto che si fonda su esperienze fortemente percettive relative a ciò che si vede quando si effettuano successivi Zoom sul grafico di una funzione. La linearità locale, ossia la proprietà per certe funzioni di poter essere approssimate, in alcuni loro punti, da una funzione lineare, è un concetto formale, che necessita, per essere introdotto, di un adeguato simbolismo che consenta di rappresentare la "migliore approssimazione lineare", quando esiste, di una funzione in un suo punto.

La rettificazione locale porta con sé, inevitabilmente, anche l'idea di funzione non derivabile in certi punti: si tratta, per esempio, di quelle funzioni il cui grafico, in quei punti, presenta cuspidi o punti angolosi. La linearità locale riguarda solo le funzioni derivabili: quelle per cui è possibile determinare la "migliore approssimazione lineare" in un punto (Piez, Smith, & Tall, in preparazione). Inoltre la linearità locale è essenzialmente un concetto locale, mentre la rettificazione locale esplorata con un software che consente di percorrere la curva, consente l'estensione a una visione globale della pendenza della funzione, considerata essa stessa come funzione.

L'approccio didattico che qui si suggerisce è di lavorare, utilizzando TI InterActive!, sulla rettificazione locale per avviare alla comprensione del concetto linearità locale in un suo punto, espresso formalmente dall'espressione $f(x_0+h)-f(x_0)=\lambda(x_0)h+h\varepsilon(h)$, dove $\lambda(x_0)$ dipende solo da f e da x_0 e $\varepsilon(h)$ è un infinitesimo con h (tra l'altro ciò porta a un interessante strumento per il calcolo approssimato di $f(x_0 + h)$ a partire dal calcolo di $f(x_0)$ e di $\lambda(x_0)$).

Si può partire considerando alcune funzioni derivabili e si fanno vari Zoom Box (accertarsi che le impostazioni degli Zoom prevedano lo stesso fattore per la scala orizzontale e per quella verticale) in alcuni loro punti mostrando che il grafico delle funzioni considerate, all'aumentare dell'ingrandimento, assomiglia sempre più a una retta. Si può far notare che approssimare la funzione nell'intorno del punto nel quale si sono effettuati gli ingrandimenti fa perdere informazioni sulla concavità, ma mantiene quella sulla crescenza e consente di ottenere un oggetto molto più semplice: la funzione lineare che ha per grafico quella retta e che è individuata da due soli parametri ed è caratterizzata da un'algebra molto più semplice (per esempio, le operazioni di addizione e composizione di funzioni lineari danno ancora funzioni lineari).

Nei grafici della figura 1, la funzione e^x è rappresentata inizialmente nella finestra grafica $[-10; 10]\times[10;10]$ e poi in finestre sempre più piccole, mediante successivi Zoom Box intorno al punto (0;1). Le seguenti immagini rappresentano alcune istantanee di varie operazioni di Zoom Box effettuate intorno al punto (0;1) con fattori di scala verticali e orizzontali entrambi uguali a 2.

Un’altra possibilità è quella di utilizzare il comando Zoom In; in tal caso, se si vuole centrare l’ingrandimento sul punto (0; 1), bisogna utilizzare, come finestra iniziale, una che abbia centro in (0; 1), per esempio $[-10; 10]\times[-9;11]$. Il vantaggio di questa scelta è che, una volta individuata una finestra grafica che abbia come centro il punto P attorno al quale si vuole ingrandire, i successivi Zoom In e Zoom Out vengono fatti sempre intorno a P.

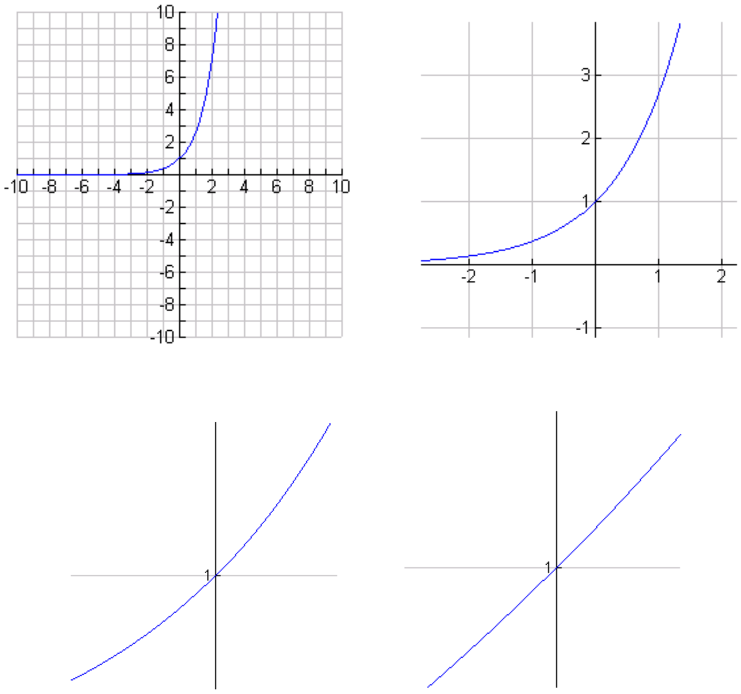


Figura 1

La “rettificazione locale” è qualcosa di fortemente percettivo: grazie a TI InterActive! si vede, si palpa con lo sguardo!
In seguito si può continuare l’esplorazione ciccando sul bottone “tangent” e agire con successivi Zoom In e Zoom Out e vedere come e quanto la tangente approssima la funzione al variare della finestra grafica considerata. Non appena il grafico della funzione sembra una retta coincidente con la tangente, si può far vedere che, facendo scorrere il punto di tangenza, c’è ancora, per varie finestre grafiche, un’apprezzabile variazione numerica della pendenza, il che suggerisce che si tratta, in realtà, non di una retta, ma di una parte di curva. In questo caso, quindi, l’ambiente numerico consente visioni molto più raffinate e significative di quello grafico.

Per esempio, gli ultimi due grafici della figura 2 sono stati realizzati nella stessa finestra grafica, ma nel primo il punto di tangenza è in (0; 1), nel secondo è (0.002238; 1.00224): in questi caso i numeri danno informazioni che sfuggono all'indagine visiva.

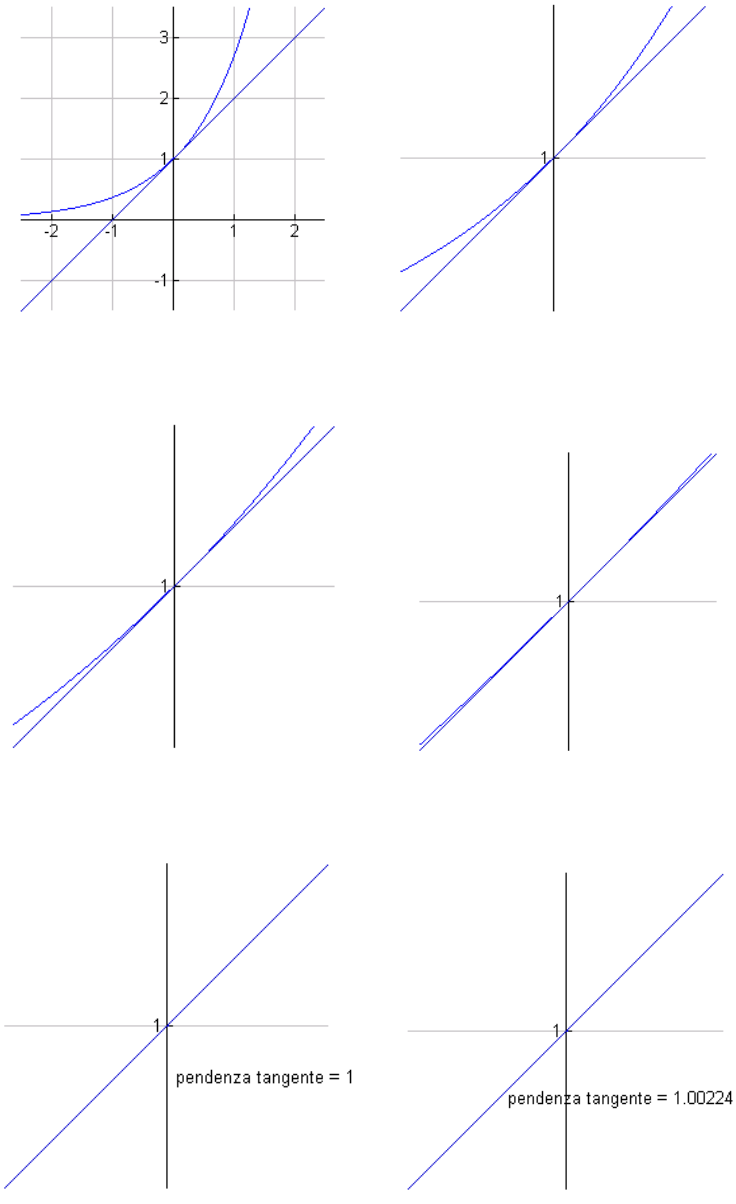


Figura 2

In seguito si può ritornare alla schermata iniziale e percorrere la curva con le tangenti. L'attenzione transita dagli aspetti locali a quelli globali e quindi un'attività di questo tipo aiuta a innescare quella dialettica locale / globale così delicata e importante nell'insegnamento – apprendimento del *Calculus*, ma forse più difficilmente affrontabile in ambiente carta e matita.

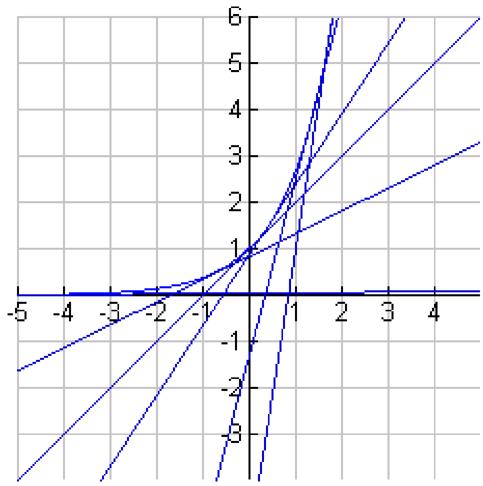


Figura 3

Si può poi proporre un'analoga attività confrontando, in un ben determinato punto, una curva che ammette tangente con una che non ammette tangente (perché, per esempio, presenta un punto angoloso). Le differenze che le due situazioni presentano possono risultare anche sorprendenti per qualche studente.

Nei grafici di figura 4 si può vedere come effettuando successivi Zoom In intorno al punto (0;0) della funzione $y = |\, x\, |$, il grafico non appaia mai come una retta, ma continui a mantenere le stesse caratteristiche (la finestra grafica dell'ultima figura è $[-0.00002; 0.00002] \times [-0.00002; 0.00002]$.

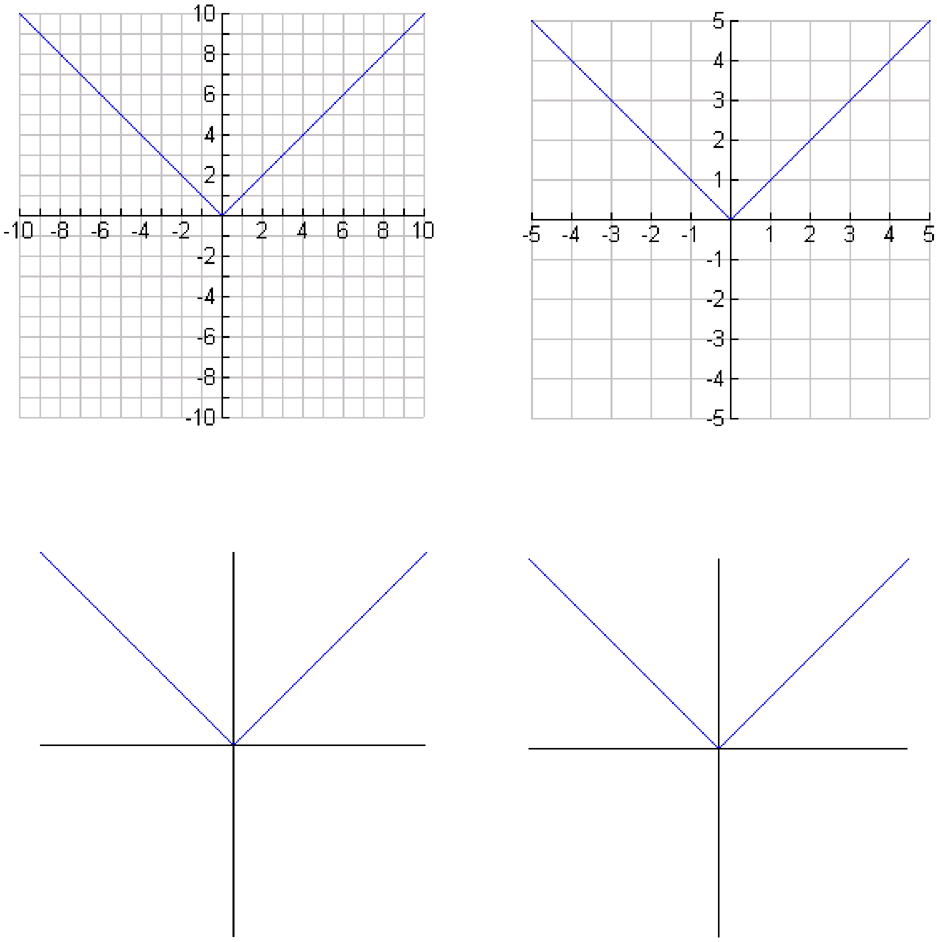


Figura 4

Lo scopo di attività di questo tipo, che devono essere proposte e realizzate per più volte, sia in classe che a casa, è quello di far diventare innanzitutto la "rettificazione locale" una radice cognitiva per poter in seguito fondare su di essa il concetto di linearità locale intesa come possibilità di determinare la migliore approssimazione lineare di una funzione in un punto, concetto sul quale si può fondare molta parte dello sviluppo della teoria del *Calculus*.

Dalla possibilità di appiattire localmente un grafico al concetto di continuità puntuale

TI InterActive! può anche essere utilizzato per costruire, a partire da osservazioni ed esplorazioni dinamiche, il concetto di continuità puntuale. Immaginiamo, infatti, di stirare orizzontalmente una funzione in una finestra grafica la cui scala verticale venga fissata. Il grafico della funzione può apparire completamente piatto (ossia ridursi a un segmento orizzontale) se esiste un intervallo del tipo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ sul quale i valori della funzione giacciono nell'intervallo $(f(x_0) - \varepsilon,\ f(x_0) + \varepsilon)$ e se 2ε è l'altezza di un pixel. Tutto ciò porta in modo naturale alla definizione formale di continuità:
$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$ tale che $|\,x - x_0| < \delta \Rightarrow |\,f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ (Piez., Smith, & Tall, in preparazione).

Si considerino diverse funzioni, alcune continue e altre discontinue in qualche punto; per ciascuna di esse:

a) si tracci il grafico;
b) si impostino le opzioni di Zoom uguali a 2 sull'asse orizzontale e uguali a 1 su quello verticale (in modo tale che la scala verticale rimanga fissata, ossia la funzione non venga stirata verticalmente, ma solo orizzontalmente);
c) si scelga un punto sul quale effettuare Zoom successivi

Si potrà osservare che le funzioni che sono continue nel punto diventano piatte, ossia si riducono a segmenti orizzontali, mentre quelle discontinue nel punto rispetto al quale si sono fatti i successivi Zoom si riducono a due segmenti orizzontali di differente quota o tendono a sfuggire dallo schermo, a seconda di quello che accade nel punto di discontinuità.

I grafici della figura 5 danno un'idea di alcune possibili esplorazioni degli studenti. Nei primi quattro una funzione continua ($y = \sqrt[3]{x^2}$) viene stirata orizzontalmente fino ad apparire piatta; negli ultimi due la funzione discontinua $f(x) = \begin{cases} x-1, & x<0 \\ x+1, & x \geq 0 \end{cases}$, pur essendo stirata orizzontalmente non appare piatta (il salto in 0 permane).

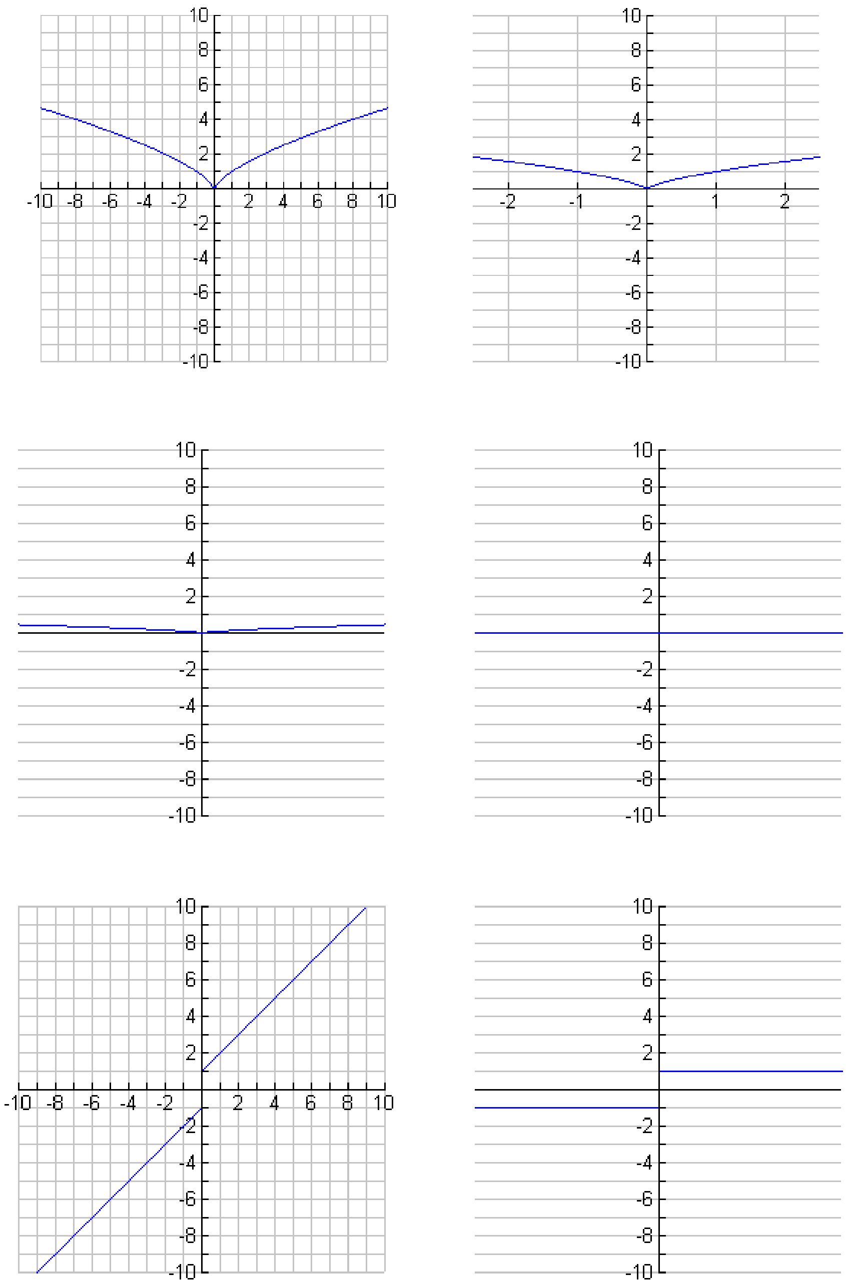


Figura 5

Per definire una funzione discontinua con TI InterActive! si può seguire il seguente metodo:

a) Si apre la finestra di manipolazione simbolica (Math Box)
b) Si accede al menu "Math" e, successivamente, ai sotto menu "Variable" e "Define"
c) Si scrive Define g(x)= when(x < 0,x – 1,x + 1)
d) Si apre la finestra grafica (Graph) e si chiede di disegnare y1(x) = g(x)

Oppure si può seguire il seguente metodo:

a) Si apre la finestra di manipolazione simbolica (Math Box)
b) Si accede al menu "Math" e, successivamente, ai sotto menu "Algebra" e "Piecewise"
c) Si definisce la funzione continua a tratti $g(x)$ utilizzando la sintassi facilitata del sotto menu "Piecewise"
d) Si apre la finestra grafica (Graph) e si chiede di disegnare y1(x) = g(x).

Lo scopo di attività di questo tipo, che devono essere proposte e realizzate più volte, sia in classe che a casa, è quello di far diventare innanzitutto la "piattezza locale" una radice cognitiva per poter in seguito fondare su di essa il concetto di continuità puntuale, consentendo agli studenti di associare significati alla sua definizione formale.

Dalla piattezza locale e dall'area sottesa al grafico di una funzione al teorema fondamentale del calcolo

Dal punto di vista delle radici cognitive, il teorema fondamentale del calcolo si fonda sull'idea intuitiva che l'area della superficie sottesa al grafico di una funzione può essere calcolata in modo approssimato ricoprendo l'area con una quadrettatura e contando il massimo numero di quadrati completamente contenuti in essa e il minimo numero di quelli la cui unione contiene completamente la superficie. L'area, in quadratini, della superficie è compresa fra questi due numeri.

L'area sottesa alla parte di grafico di una funzione $y = f(t)$ per t che varia da a a x è una funzione di x, diciamo una funzione $y = A(x)$, che può essere approssimata, per ogni x, con le quadrettature cui prima si è fatto cenno.

Questa idea, che si basa su un approccio fortemente percettivo (certi software fanno vedere plurirettangoli che approssimano l'area sottesa a una curva e mostrano come l'area varia al variare di x) può dare significato all'approccio formale all'integrazione definita.

Se all'idea dell'area sottesa al grafico di una curva continua si unisce l'idea della piattezza locale del grafico di una funzione continua, si ha, a basso costo, il teorema fondamentale del calcolo. Infatti la continuità implica che il grafico può essere stirato orizzontalmente fino ad apparire piatto (orizzontale). Ciò vuol dire, formalmente, che

$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$ tale che $|\ x - x_0| < \delta \Rightarrow |\ f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Allora, per $-\delta < h < \delta$, la funzione $F(x+h)-F(x)$, che rappresenta l'area $A(x)$, giace fra $(f(x)-\varepsilon)h$ e $(f(x)+\varepsilon)h$. Così (per h diverso da 0), $\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h}$ giace fra $f(x)-\varepsilon$ e $f(x)+\varepsilon$. Con un passaggio al limite si ottiene il teorema fondamentale del calcolo (Piez., Smith, & Tall, in preparazione).

Propongo ora la seguente attività con TI InterActive!, il cui obiettivo è quello di valutare la relazione che esiste fra l'area sottesa al grafico di una funzione in un dato intervallo, diciamo da x a $x + h$, e il valore della funzione in x.

Per motivi tecnici legati alla gestione dello Zoom, può essere opportuno, anche se non necessario, che il docente prepari il foglio di lavoro nel seguente modo:

a) Inserire la formula della funzione, per esempio sin x .
b) Inserire l'intervallo nel quale si vuole calcolare l'area[5], per esempio l'intervallo [1; 1,001] .
c) Far disegnare il grafico di sin x in [1; 1,001].
d) Fissare il fattore di stiramento verticale uguale a 1, agendo sulle opzioni di Zoom.
e) Tornare indietro, con Zoom out, fino a vedere un grafico della funzione (in questo caso sin x) ben riconoscibile.

A questo punto si può consegnare il foglio di lavoro agli studenti e si può far partire l'esplorazione (il compito, ossia il calcolo dell'area sottesa al grafico di sin x nell'intervallo [1; 1,001] e la sua visualizzazione grafica, deve essere ben chiaro agli studenti). Innanzitutto si può far eseguire il calcolo alla macchina, che restituirà un numero[6]. In seguito si può suggerire agli studenti di utilizzare la funzione Zoom per vedere sempre meglio quello che accade nell'intervallo [1; 1,001]. Poiché il fattore di stiramento verticale è uguale a 1, gli studenti vedranno, via via, il grafico appiattirsi e la superficie di cui si vuole calcolare l'area assomigliare sempre più a quella di un rettangolo di dimensioni sin(1) e

---

[5] Sarebbe opportuno aver già aver fatto effettuare agli studenti attività di calcolo di aree sottese a grafici con quadrettature e plurirettangoli: l'aspetto algoritmico e numerico è una componente essenziale per l'acquisizione dei concetti fondamentali del *Calculus*.

[6] Gli studenti dovrebbero essere a conoscenza del fatto che la macchina può eseguire il calcolo con un metodo simile a quello dei plurirettangoli; in alcuni casi gli studenti potrebbero anche aver scritto veri e propri programmi in un linguaggio di programmazione come, per esempio, quello delle calcolatrici tascabili o aver costruito appositi fogli di lavoro con un foglio elettronico)

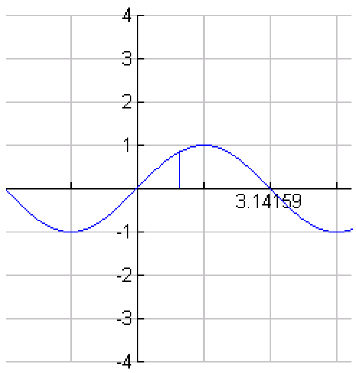
0.001. Si può far notare che, in generale, ciò vuol dire che, per le funzioni il cui grafico può essere reso piatto, l'area è data dal prodotto $f(x)\,h$.
Tutto ciò può preparare, in modo naturale e graduale, a dare significato al teorema fondamentale del calcolo. Infatti, se $A(x) = f(x)\,h$, si ha anche:

$$\frac{A(x)}{h} = \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x)$$

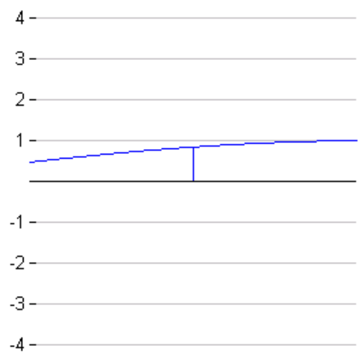
e, passando al limite per h che tende a 0,

$$F'(x) = f(x).$$

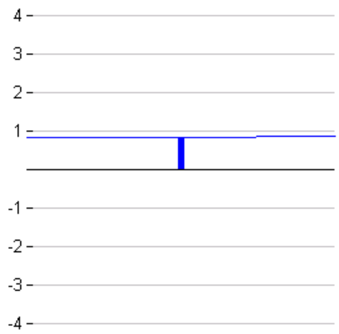
In sostanza, quel che si può far passare è che la variazione dell'area è $f(x)$ volte la variazione della variabile indipendente x. Ossia la rapidità della variazione dell'area da x a $x + h$ (la pendenza della secante alla funzione area) tende ad avvicinarsi sempre più al valore della funzione in x, man mano che h diminuisce. Questo è proprio quanto afferma il teorema fondamentale del calcolo, solo che è detto nel linguaggio naturale, dopo aver fatto varie esperienze utilizzando il registro grafico – visivo e magari anche quello numerico se si sono effettuate altre esperienze del tipo di quelle cui prima si accennava (programmi di calcolo approssimato di aree sottese al grafico di una funzione in un dato intervallo).
L'esplicitazione delle condizioni sotto le quali il teorema fondamentale del calcolo vale è spesso una delle principali cause della perdita di significato: il significato intuitivo (che è poi quello di mettere in relazione tassi di crescita con l'ammontare della crescita) si perde a scapito di una concentrazione sugli aspetti sintattici di manipolazione algebrica e di trasformazione di una formula in un'altra.
Naturalmente può anche essere utile far eseguire il calcolo numerico dell'area e confrontare in ambiente "Math" la differenza tra il calcolo effettuato dell'area e quello del valore di $f(x)$ per l'ampiezza dell'intervallo. Si potrebbe anche vedere quali differenze ci sono fra i due valori in base all'intervallo considerato e che se si prende un intervallo troppo grande, la funzione non si appiattisce.
Qui di seguito sono riportate alcune istantanee di successivi Zoom In per cercare di dare un'idea dell'esplorazione che gli studenti potrebbero effettuare (i grafici i riferiscono alla funzione sin x).



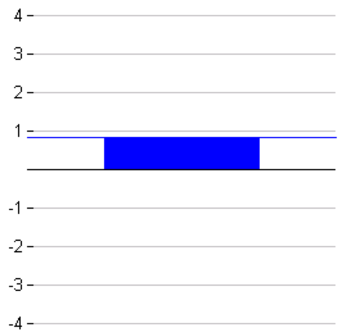
Finestra: [-3.0955 ; 5.0965] x [-4 ; 4]



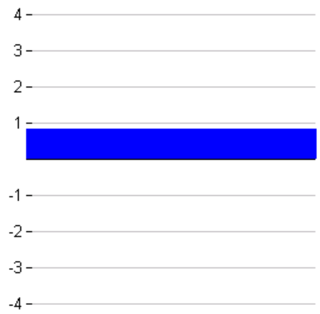
Finestra: [0.4885 ; 1.5125] x [-4 ; 4]



Finestra: [0.9685 ; 1.0325] x [-4 ; 4]



Finestra: [0.9995 ; 1.0015] x [-4 ; 4]



Finestra: [1 ; 1.001] x [-4 ; 4]

Figura 6

Eventualmente si possono far ripercorrere gli Zoom In e Out avanti e indietro, più volte, fino a che il processo non consenta di appropriarsi dell'idea verso la quale l'attività è rivolta. Naturalmente l'attività di osservazione e di azione deve essere accompagnata da verbalizzazioni prima libere, poi guidate, infine scritte, con particolare attenzione alla correttezza e adeguatezza del linguaggio utilizzato, compreso quello dei gesti che, molto spesso, suggeriscono che gli studenti possiedono conoscenze tacite non ancora esplicitabili in un linguaggio adeguato, ma non per questo poco importanti dal punto di vista cognitivo.
Vorrei concludere questa parte dedicata alla presentazione di TI InterActive! e delle attività che è possibile effettuare con tale software, con indicazioni per il reperimento di ulteriori materiali disponibili in rete. Si tratta di materiali che ho iniziato a preparare, ma che sono in fase di produzione e rielaborazione e che ambirebbero, una volta completati, ad avere le seguenti caratteristiche:

a) organici e sistematici (composti da tutte quelle caratteristiche che ha un libro di testo, ma con in più l'interattività consentita dal software);
b) disponibili in rete per poter essere messi non solo a disposizione per l'utilizzazione, ma per l'analisi critica e la revisione continua;
c) pensati per lo studente, ossia non come aiuto all'insegnante per spiegare, ma come motivazione per lo studente a fare e, di conseguenza, come strumento di valutazione dei processi di pensiero degli studenti.

Questi materiali possono essere scaricati collegandosi all'indirizzo web http://www.matematica.it/paola/analisi.htm. Spero che, con il contributo di colleghi interessati, possano essere analizzati criticamente, in modo da evidenziare errori e inopportunità didattiche e possano essere completati e sperimentati. Mi piacerebbe avviare una riflessione significativa, sull'individuazione degli schemi d'uso e dello studio della genesi strumentale[7] di un software come TI IntrerActive!; altrettanto interessante sarebbe un'indagine seria e approfondita sui comportamenti degli studenti, sulle modalità di comunicazione delle conoscenze che un ambiente di insegnamento – apprendimento come quello descritto potrebbe avviare.

[7] Con "genesi strumentale" si intende quel delicato processo che porta un artefatto a essere consapevolmente utilizzato con determinati schemi d'uso finalizzati all'acquisizione di competenze specifiche.

La piattaforma Java MathWorlds e l'avvio al *Calculus*[8]

James Kaput e altri ricercatori, fra i quali ricordo Ricardo Nemirosky e Jeremy Roschelle stanno lavorando a un progetto di profonda innovazione dell'insegnamento – apprendimento del *Calculus* con l'obiettivo di rendere accessibile a tutti gli studenti, fin dai primi anni della scuola secondaria di primo grado, le nozioni che consentono di studiare la matematica delle grandezze che variano. Le finalità e i materiali del progetto sono disponibili all'indirizzo internet http://www.simcalc.umassd.edu/simcalcframe.html . In particolare i responsabili del progetto Simcalc hanno progettato e realizzato un ambiente software, MathWorlds, che mette a disposizione degli utenti micromondi animati in cui gli attori si muovono in accordo ai grafici che vengono prodotti e che possono essere modificati dinamicamente attraverso il solo uso del mouse. Tale software, libero e gratuito, può essere scaricato dal sito http://www.simcalc.umassd.edu/simcalcframe.html .

Java MathWorlds è un software molto meno ricco di TI InterActive!, ma ha l'innegabile vantaggio di essere gratuito e di poter essere proposto, in gran parte, anche a studenti della scuola secondaria di primo grado.

Le prime unità didattiche proposte riguardano gli argomenti pendenza, funzioni lineari ed equazioni; in particolare, mediante le attività che propongono, gli studenti possono iniziare a comprendere le relazioni tra la pendenza di un grafico, che rappresenta la posizione di un corpo al variare del tempo, e la velocità del corpo. Per esempio, è possibile vedere come cambiamenti nella velocità si riflettano sulla pendenza del grafico della legge oraria delle posizioni e, viceversa, come modifiche nella pendenza producano variazioni nella velocità degli attori dei micromondi. Nella varie attività è possibile tenere contemporaneamente presenti gli aspetti numerici (tabelle dei dati), quelli grafici (grafici delle leggi orarie di posizione o di velocità) e quelli algebrico – formali (le formule che esprimono le leggi orarie di posizione o di velocità). Non si tratta solo di collegare fra loro le tre differenti rappresentazioni, ma di fondare il loro significato sul fenomeno del moto di un corpo. Nelle prime attività iniziano anche a farsi strada due idee fondamentali nello sviluppo del *Calculus* e cioè che la posizione può essere determinata dall'area sottesa a un grafico velocità – tempo e che la pendenza di un grafico posizione – tempo è

[8] Quanto qui riportato sull'ambiente MathWorld è tratto da un mio lungo articolo sull'uso delle nuove tecnologie nella didattica della matematica, pubblicato sulla rivista *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, nel volume 27 A – B n. 6, 2004, dal titolo Diversi modi di insegnamento – apprendimento della matematica. Insegnamento – apprendimento tecnologico.

essa stessa una funzione del tempo (identificata con la funzione velocità). Naturalmente la relazione tra posizione e area sottesa a un grafico velocità – tempo viene introdotta a partire da funzioni velocità che sono costanti o che sono costanti a tratti. Particolare attenzione, fin dall'inizio, è posta ai numeri con segno e al loro significato in termini di distanza percorsa e di verso dello spostamento.
Nelle successive unità (vedere Package 2 al sito dove i materiali possono essere scaricati, http://www.simcalc.umassd.edu/simcalcframe.html) si inizia a prendere in considerazione il concetto di media in differenti contesti, iniziando da quelli legati al moto, dove la media di una velocità variabile è definita come la velocità costante che bisognerebbe mantenere per percorrere, nell'intervallo di tempo fissato, la stessa distanza che il corpo percorre muovendosi con velocità variabile. Si passano poi a considerare altri contesti di quantità variabili, soprattutto in situazioni di microeconomia.
Le attività conclusive (vedere in particolare Package 4 sul sito http://www.simcalc.umassd.edu/simcalcframe.html) riguardano i due modi fondamentali di descrivere quantità che variano: in termini di tassi di variazione (che rispondono alla domanda "qual è la velocità della variazione?") e in termini di ammontare o somma totale (per rispondere alla domanda "di quanto è variata?"). L'idea è quella di offrire strumenti per far capire che queste due modalità sono essenzialmente equivalenti; il significato del teorema fondamentale del calcolo sta proprio nell'affermazione di questa equivalenza, anche se spesso ciò è oscurato dall'espressione in termini formali, dove, come già detto, i simboli del linguaggio algebrico e l'esplicitazione di ipotesi che coinvolgono proprietà delle funzioni rischiano di concentrare l'attenzione su aspetti formali legati alla trasformazione di formule, invece che sugli aspetti legati al significato dei concetti coinvolti.
Come in ogni attività di MathWorlds, i micromondi mettono a disposizione la possibilità di tenere presenti differenti registri di rappresentazione e descrizione delle situazioni considerate. In particolare, selezionando, nel menu "window", la funzione "matrix", è possibile vedere quali registri di rappresentazione è possibile attivare nel micromondo. La figura qui di seguito riportata indica che vi è un solo attore (un ascensore), di cui vengono dati:

a) i grafici che rappresentano le leggi orarie di posizione e di velocità (Position e Velocity)
b) la rappresentazione del mondo reale (World), ossia una schematizzazione dell'ascensore e del suo movimento
c) un segno che terrà traccia del passaggio dell'ascensore a ogni piano (Marking)

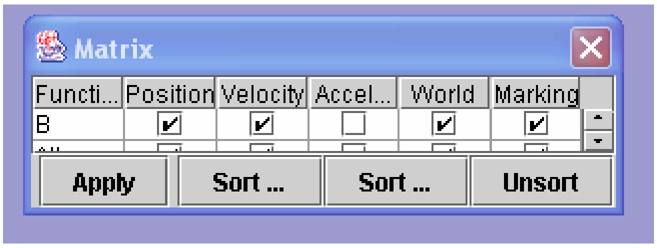


Figura 7

La finestra

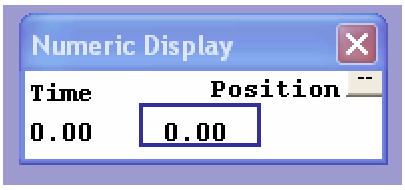


Figura 8

indica, invece, che è stato attivato anche il Display Numerico (accessibile sempre dal menu Window) e che quindi si ha a disposizione, per l'osservazione della simulazione del movimento dell'ascensore, anche la tabella numerica della variazione della posizione al variare del tempo.
Il foglio di lavoro di MathWorlds appare, in questo caso, come indicato dalla figura 9:

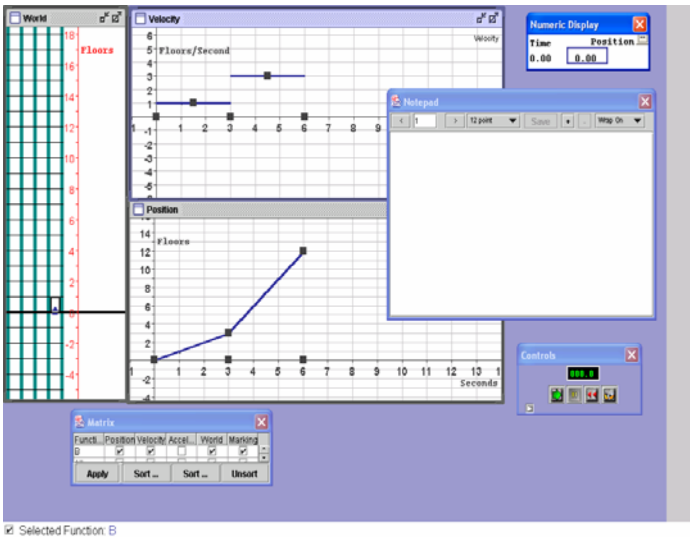


Figura 9

Come si può vedere c'è un menu che consente il controllo rapido di alcune funzioni (Controls, in basso a destra) e, precisamente, da sinistra verso destra, l'avvio dell'animazione, la pausa dell'animazione, il ripristino delle condizioni iniziali e la possibilità di effettuare il movimento dell'ascensore piano per piano. C'è inoltre un notepad che può consentire allo studente la trascrizione di qualche appunto.
Lanciando l'animazione, l'ascensore si muove per un tempo stabilito (che può essere modificato agendo sul menu dei controlli), secondo quanto indicato dalle leggi orarie della posizione e della velocità, come suggerisce la seguente figura che è un'istantanea ottenuta dal movimento dell'ascensore.

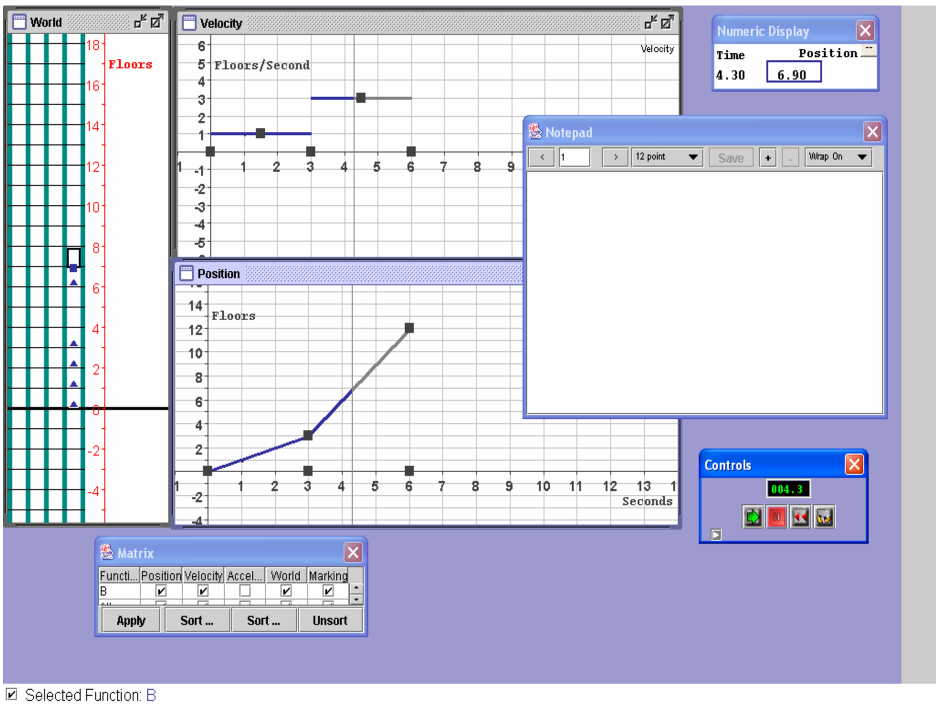


Figura 10

Con il mouse è possibile agire direttamente sui grafici delle leggi orarie della posizione e della velocità, osservando gli effetti che i cambiamenti prodotti dall'utente sull'una hanno sull'altra e osservando, in seguito, come cambia, a causa dei precedenti cambiamenti, il moto dell'ascensore una volta che sia stata rilanciata l'animazione. È anche già possibile iniziare a discutere con gli studenti sulle le relazioni che esistono tra l'area sottesa al grafico della legge oraria della velocità e il grafico della posizione dell'ascensore. Si può anche

riflettere sul significato dei numeri con segno e, in questa particolare situazione, del significato di numeri non interi. Insomma, è possibile proporre problemi che consentano di fare esperienza sulle relazioni che legano spazio percorso, tempo trascorso e velocità di un corpo in movimento. Per esempio è possibile fissare la velocità e chiedere quanto tempo deve durare il moto dell'ascensore affinché questo possa raggiungere il sesto piano. Oppure si chiede qual è la velocità da dare all'ascensore perché possa raggiungere, in un numero fissato di secondi, un determinato piano.
Tutto ciò, come scrive Kaput, non è solo una pura serie di funzionalità messe a disposizione del software e di attività da svolgere in classe, ma porta a una ricostruzione delle idee chiave del *Calculus*. Non si sta semplicemente affrontando con nuove metodologie le idee che soggiacciono al *Calculus*, anticipandole e considerandole come fondamentali nei curricoli scolastici, ma le si sta riformulando profondamente, perseguendo la costruzione di un nuovo alfabeto per la matematica delle grandezze che variano, che potrebbe avere, per le rappresentazioni matematiche, gli stessi effetti che l'alfabeto fonetico ebbe per l'espressione scritta.

Il software Graphic Calculus e l'avvio al *Calculus*

Graphic Calculus consiste in una serie di programmi che possono aiutare studenti di differenti età, in particolare della scuola secondaria superiore e dei corsi universitari di matematica di base, a visualizzare i concetti fondamentali del *Calculus*. Gli aspetti grafici, quelli numerici e quelli formali sono in genere contemporaneamente disponibili nei diversi moduli di programma del software. Un modulo consente di inserire la formula di una funzione e di ottenere una sua rappresentazione grafica e una tabulare. Con il modulo "Finding the formula" gli studenti possono testare la loro capacità di risalire da un grafico di una prestabilita classe di funzioni alle caratteristiche della formula della funzione rappresentata. I moduli "Line", "Parabola" ed "Exponential functions" consentono di fare esperienze con le funzioni lineari, quadratiche ed esponenziali associando la variazione dei parametri significativi a ben precisi cambiamenti del grafico. Selezionando "Graphic Calculus Plus" si hanno a disposizione moduli che consentono di trattare argomenti più avanzati di matematica, in particolare il concetto di derivata in un punto, di funzione derivata e quello di funzione integrale, ma anche altri che riguardano il polinomio di Taylor, le funzioni in due variabili, i campi di direzione.
Graphic Calculus si ispira alle idee di David Tall, alle quali ho in precedenza accennato. Il software può essere scaricato collegandosi al sito http://www.graphiccalculus.co.uk/ . La prima versione del software è gratuita;

la versione più recente costa attualmente 15 dollari per la licenza individuale, 3 dollari per la licenza studente (minimo 10 studenti) e 150 dollari per una licenza di istituto. Esiste la possibilità di scaricare gratuitamente una demo per la versione più recente: in ogni caso la versione originale gratuita ha tutte le potenzialità necessarie per effettuare le attività più significative e interessanti.
Nella presentazione del software si legge: "un approccio grafico – visuale al *Calculus* è fondato sulla nostra percezione senso – motoria: su ciò che noi vediamo cambiare e su come lo vediamo cambiare. È un approccio di tipo *embodied*[9] che fonda il significato degli oggetti formali della matematica su azioni fisiche e su percezioni".
Vediamo ora qualche attività che è possibile effettuare con Graphic Calculus per l'avvio ai concetti fondamentali del *Calculus*. Si immagini di aver già effettuato varie attività finalizzate all'introduzione del concetto di funzione, per esempio esperienze con sensori fisici, in particolare quelli di posizione, come quelle suggerite in (Paola, 2003) o alle pagine 4 e 5 di (Paola, 2001). Il passo successivo potrebbe essere quello di precisare il concetto di funzione lineare, sia per quel che riguarda gli aspetti percettivo visivi (grafici), sia quelli numerici (tabelle, con particolare attenzione alla costanza delle differenze prime), sia quelli formali (formule, con particolare attenzione ai due parametri, pendenza e quota) utilizzando il modulo "Line" del software Graphic Calculus. All'apertura del modulo di presenta una schermata come quella di figura 11 che ha al centro il grafico di una funzione lineare con evidenziati due punti che sono trascinabili con il mouse. Il menu a icone, nella barra in alto a sinistra, presenta sette bottoni: il primo, da sinistra verso destra, consente di salvare la schermata grafica attuale per importarla in altri documenti; il secondo gestisce la comunicazione con la stampante; il terzo consente di ridimensionare la finestra grafica; il quarto visualizza il triangolo rettangolo che ha per ipotenusa il segmento congiungente i due punti evidenziati del grafico e per cateti, rispettivamente, i segmenti che uniscono le ascisse e le ordinate di tali punti (figura 12); il quinto visualizza il triangolo rettangolo che ha come cateti il segmento orizzontale di lunghezza unitaria costruito a partire da uno dei due punti evidenziati e il segmento verticale che rappresenta l'incremento del valore della funzione in corrispondenza di un incremento unitario della variabile indipendente (in altri termini, il valore di tale incremento verticale è la pendenza della funzione lineare: vedere la figura 13); il sesto consente di accedere all'help e il settimo riporta al menu principale di

[9] Il termine *embodied* viene talvolta tradotto con "situato", più spesso con "incorporato". Qui viene utilizzato nell'accezione di approccio percettivo – motorio all'apprendimento.

Graphic Calculus. Sulla parte destra del foglio del modulo “Line” si possono tenere sotto controllo gli aspetti numerici e formali. Essi vengono attivati con l’opzione “On”. “Numbers” consente di scegliere se rappresentare i numeri sotto forma di decimali o di frazioni. “Formula” fornisce quella che, nei libri di testo italiani, viene in genere indicata come “equazione della funzione lineare”. “y intercept” fornisce la quota, ossia l’ordinata del punto di ascissa nulla. “Slope” dà la pendenza della funzione lineare, mentre “Zero” fornisce lo zero della funzione, ossia l’ascissa del punto di ordinata nulla.

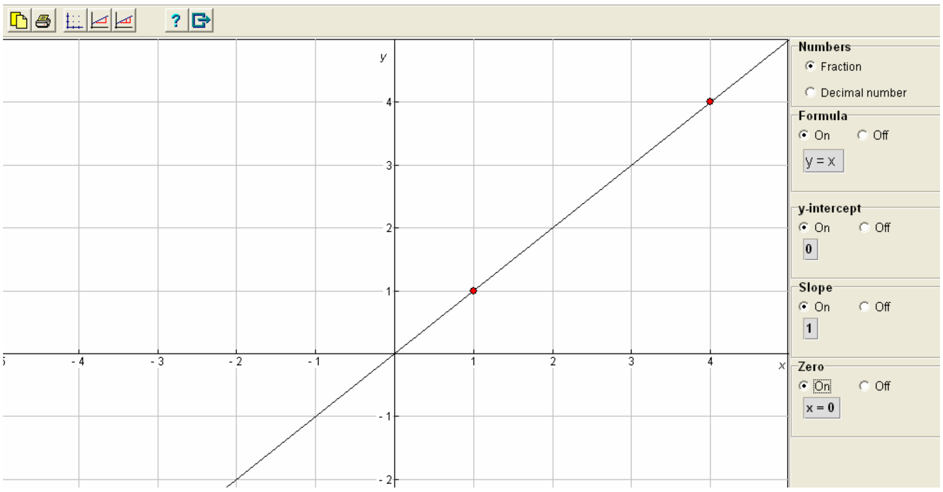


Figura 11

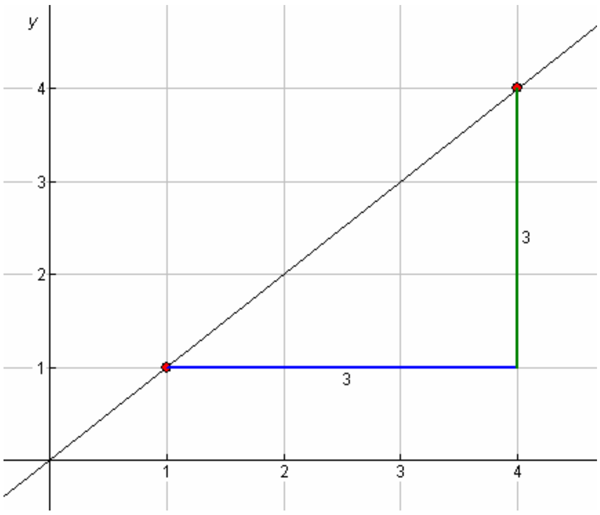


Figura 12

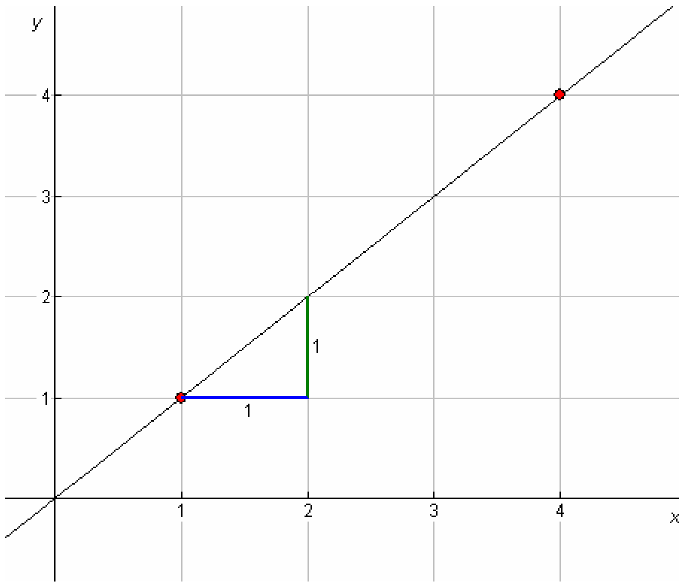


Figura 13

Un’attività che propongo in genere nel primo mese del primo anno di scuola secondaria superiore è quella di invitare gli studenti a effettuare diverse esplorazioni trascinando i due punti evidenziati con il mouse. Il compito dei piccoli gruppi di lavoro è quello di osservare attentamente come i cambiamenti nel grafico si riflettono sulla formula, sulla quota, sulla pendenza, sullo zero. La richiesta di descrivere per iscritto quanto osservato porta alla formulazione e precisazione di congetture la cui discussione e validazione, operate anche con l’aiuto dell’insegnante, consentono di costruire significati per i concetti di pendenza, quota, zero e formula di una funzione lineare fondandoli su numerose e ricche esperienze. In tal modo si lavora anche sulla tecnica di risoluzione di semplici equazioni lineari e, volendo, su quella di disequazioni lineari (passando alla richiesta del segno o del confronto fra funzioni lineari).
Una successiva attività può essere quella offerta dal menu “Finding the formula”. Scegliendo l’opzione “Linear”, il software fornisce in successione 32 grafici di funzioni lineari (figura 14) e, per ciascuna di esse, lo studente deve scrivere la formula corretta. In caso di scrittura corretta può passare al grafico successivo, avendo a disposizione quanti tentativi vuole. Per esempio, nella figura 15 è stata immessa una formula scorretta; il software fornisce il grafico relativo a tale formula e chiede se si vuol effettuare un altro tentativo. Nella figura 16, invece, è stata immessa la formula corretta.

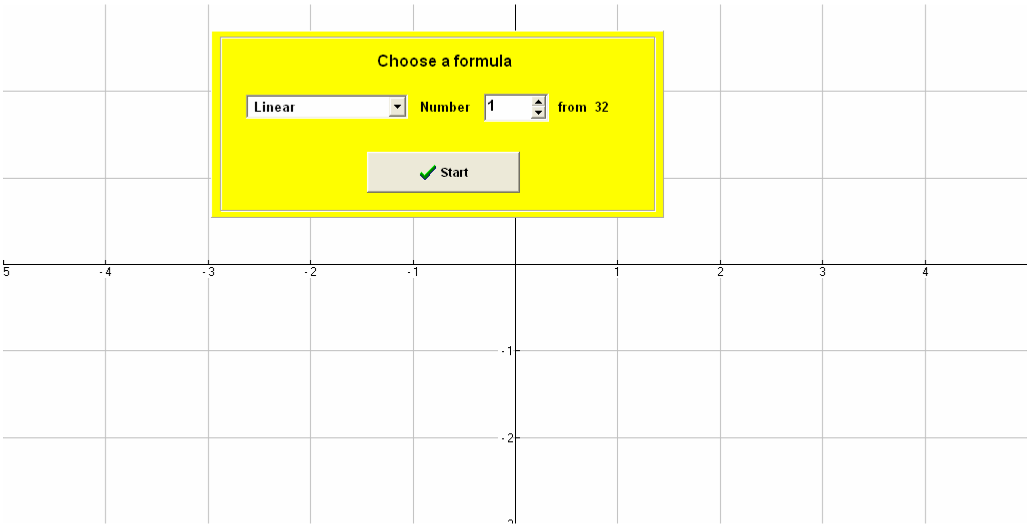


Figura 14

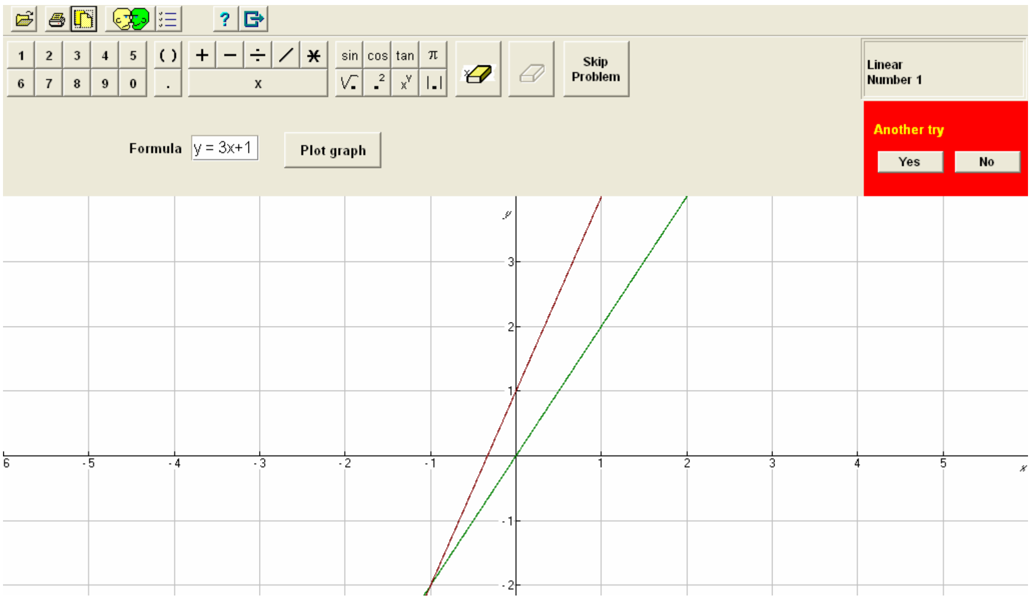


Figura 15

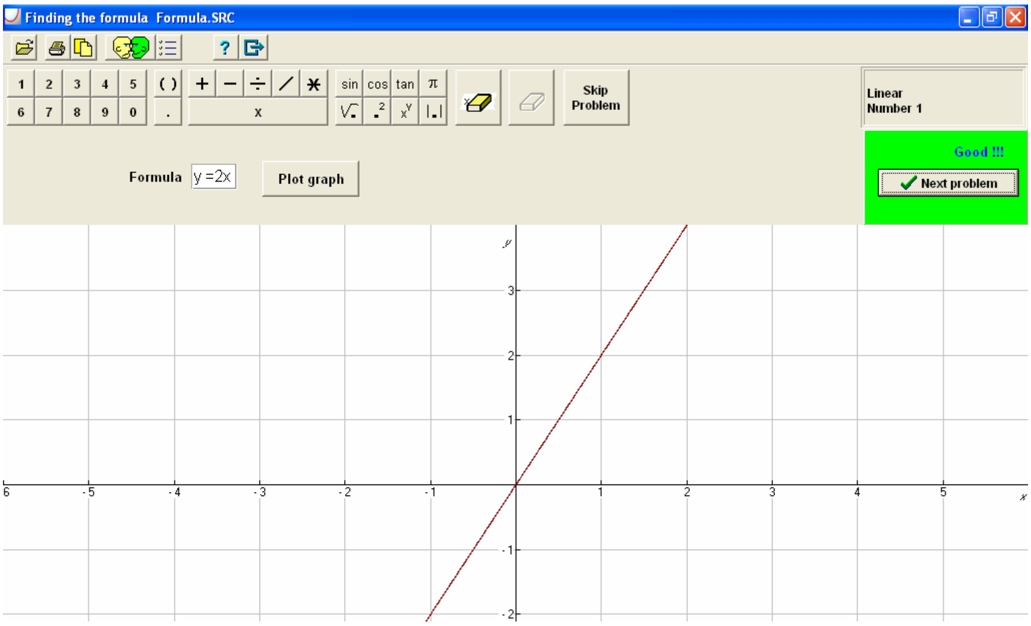


Figura 16

Attività successive possono essere effettuate utilizzando il modulo "Graphs", dove possono essere definite funzioni di vario tipo. Graphic Calculus ne traccia il grafico ed è poi possibile operare su di esso in vari modi, per esempio con la funzione "Trace", che consente di percorre il grafico vedendo come i valori numerici della funzione cambiano al variare dei valori assunti dalla variabile indipendente (figura 17); oppure con la funzione "Function value" che dà valore della funzione e quello della pendenza della funzione in un punto di ascissa assegnata dall'utente (figura 18). Un'altra potenzialità del modulo "Graphs" è quella offerta dalle funzioni di zoom, che consentono di ingrandire il grafico della funzione nell'intorno di un determinato punto e di osservare il fenomeno della "rettificazione locale".

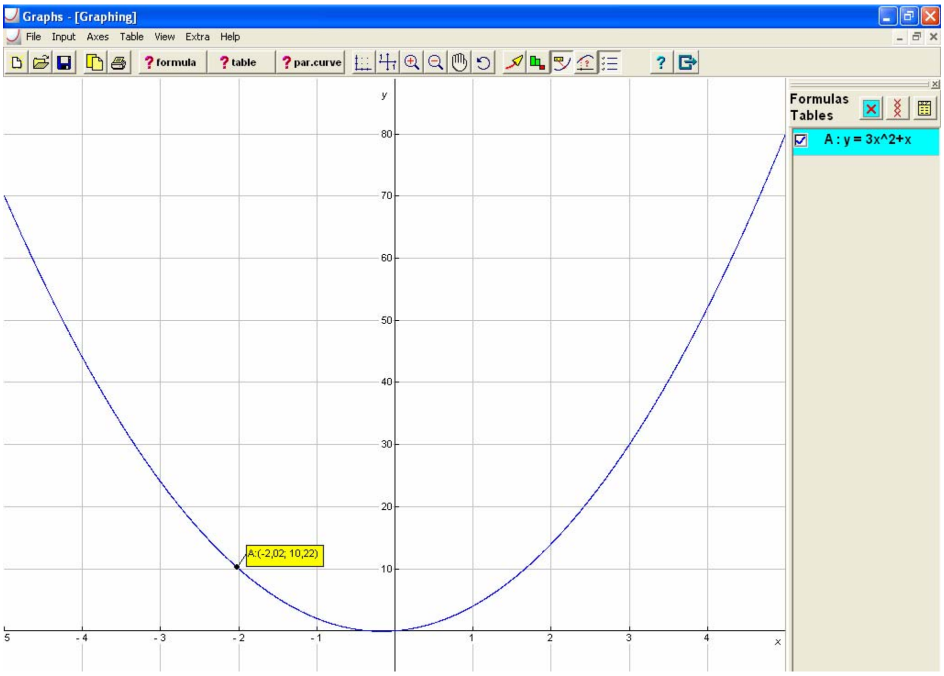


Figura 17

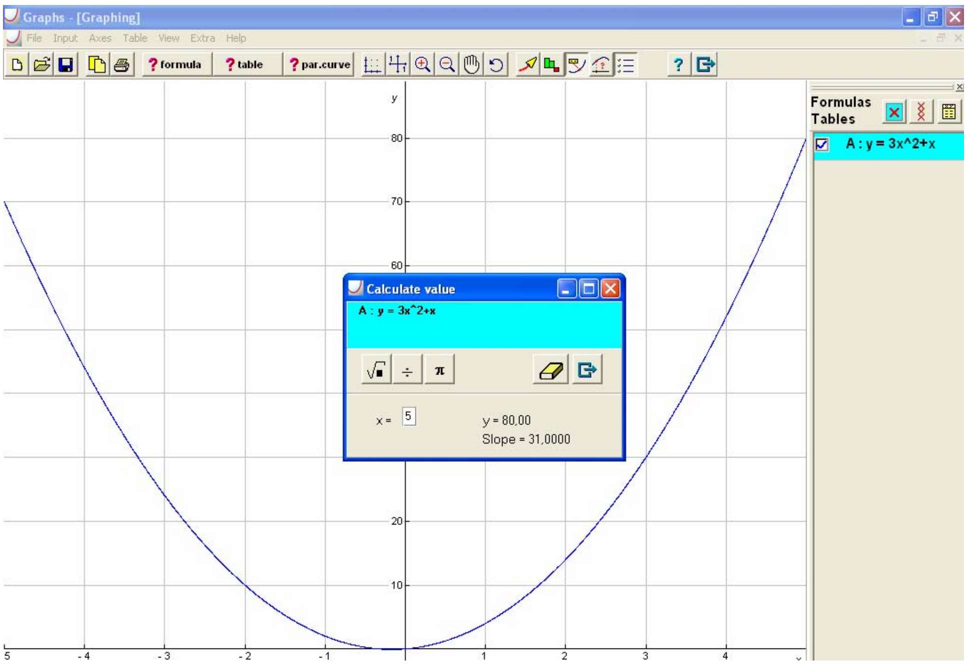


Figura 18

Attività successive, per esempio in un secondo anno di scuola secondari di secondo grado, potrebbero essere svolte con i moduli “Parabola”, “Gradient” e “Area”.

Il modulo “Parabola” consente di studiare le funzioni quadratiche, in modo del tutto analogo a quello consentito dal modulo “Line” con le funzioni lineari. Mi soffermo quindi sui moduli “Gradient” e “Area”, che consentono di lavorare sulle radici cognitive per il concetto di linearità locale e per il teorema fondamentale del calcolo.

Il modulo “Gradient” consente di osservare come cambiano, per una fissata funzione $f(x)$ e al variare del punto di ascissa x e dell’incremento h, le pendenze delle secanti a grafico di $f(x)$ nei punti $(x, f(x))$ e $((x+h), f(x+h))$.

Questo modulo è contenuto nel menu di Graphic Calculus plus a cui si accede dal menu principale (figure 19 e 20)

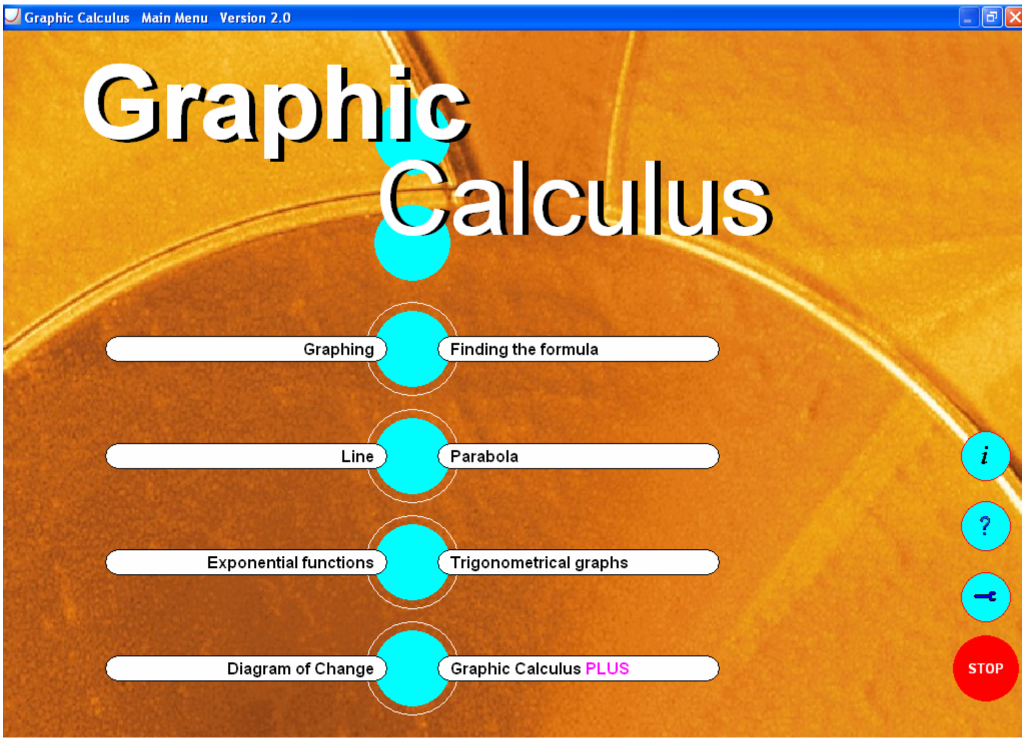


Figura 19

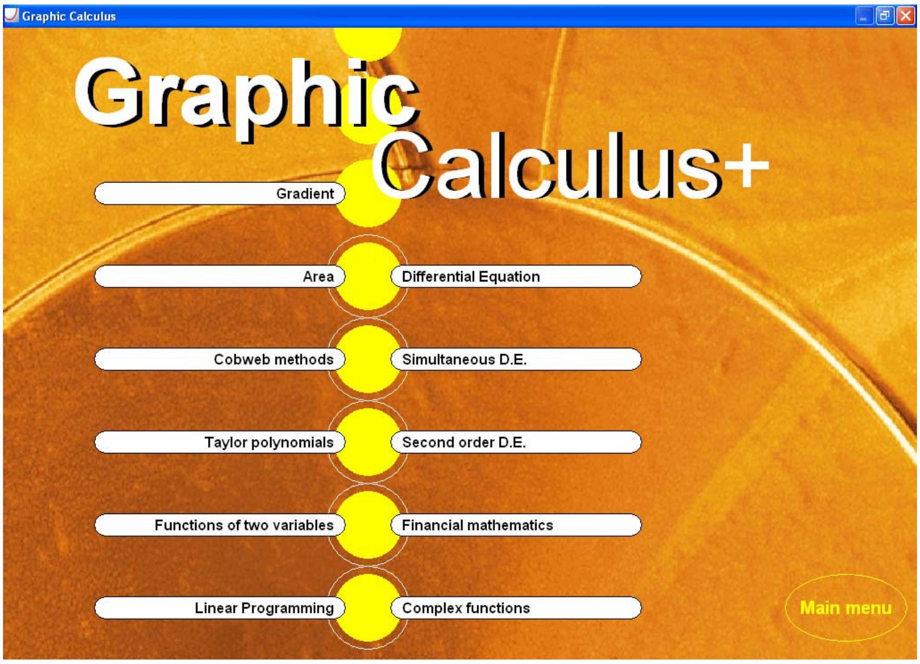


Figura 20

Ciccando su “Gradient”, scegliendo un sistema di riferimento e immettendo la formula di una funzione di cui si vuole il grafico, si apre una schermata come quella di figura 21 (in cui è rappresentato il grafico di $f(x) = x^2$), nella quale si può osservare che questo modulo è suddiviso in due parti: “Gradient” e “Gradient function”.

“Gradient” consente di avere l’approssimazione della pendenza della tangente al grafico della funzione nel punto di ascissa x indicato dall’utente nei “Profiles” (vedere figura 21) mediante il calcolo della pendenza della secante al grafico della funzione nei punti $(x; f(x))$ e $((x+h); f(x+h))$, dove h è sempre la decima parte dell’intervallo Δx scelto dall’utente nei “Profiles”. Per esempio, nella figura 21, $x = 1$, $\Delta x = 1$, quindi $h = 0{,}1$. In questo caso la derivata della funzione $f(x) = x^2$ in $x = 1$ viene approssimata dalla pendenza della secante al grafico di $f(x) = x^2$ nei punti (1; 1) e (1,1; 1,21).

Cliccando sul bottone che richiama il tasto “play” di un usuale videoregistratore, possibile lanciare un’animazione che traccia le successive secanti al grafico di f nei punti $(x; f(x))$ e $((x+h); f(x+h))$, che si ottengono, a partire da quella passante per i punti $(x; f(x))$ e $((x+\Delta x); f(x+\Delta x))$, decrementando $x+\Delta x$ con passo $h = \dfrac{\Delta x}{10}$ (figure 22 e 23).

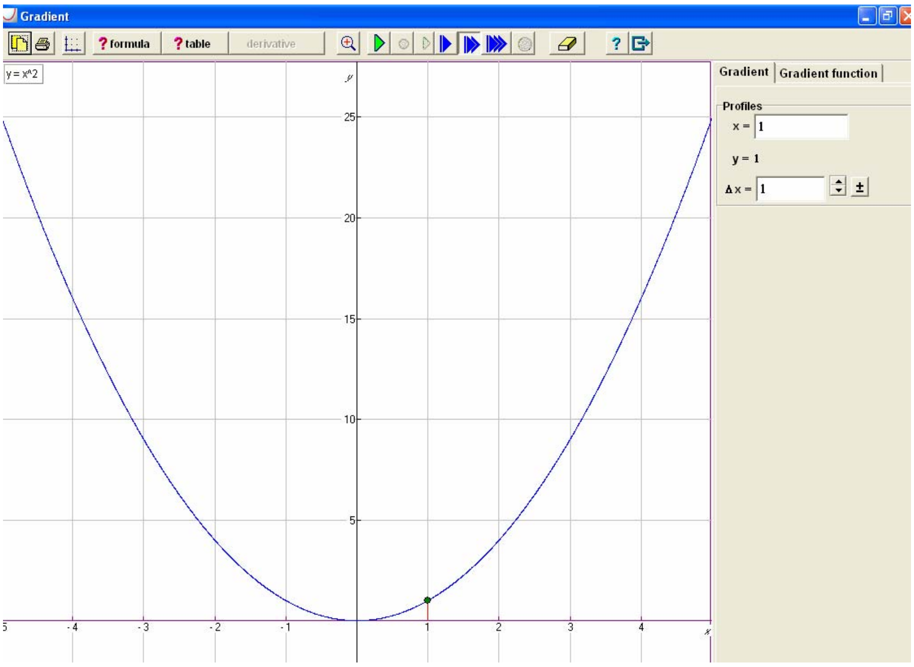


Figura 21

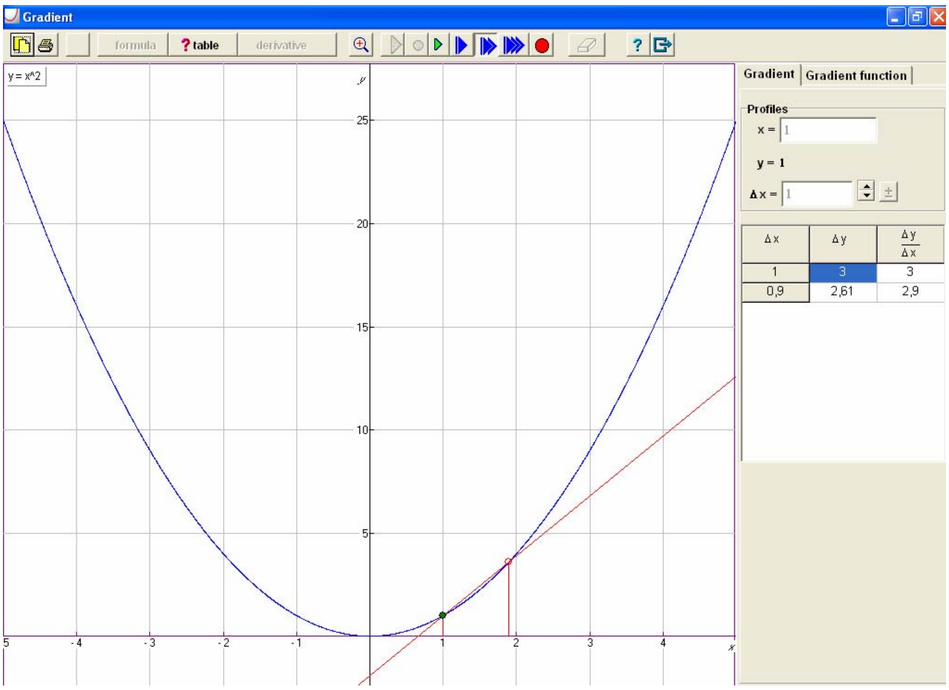
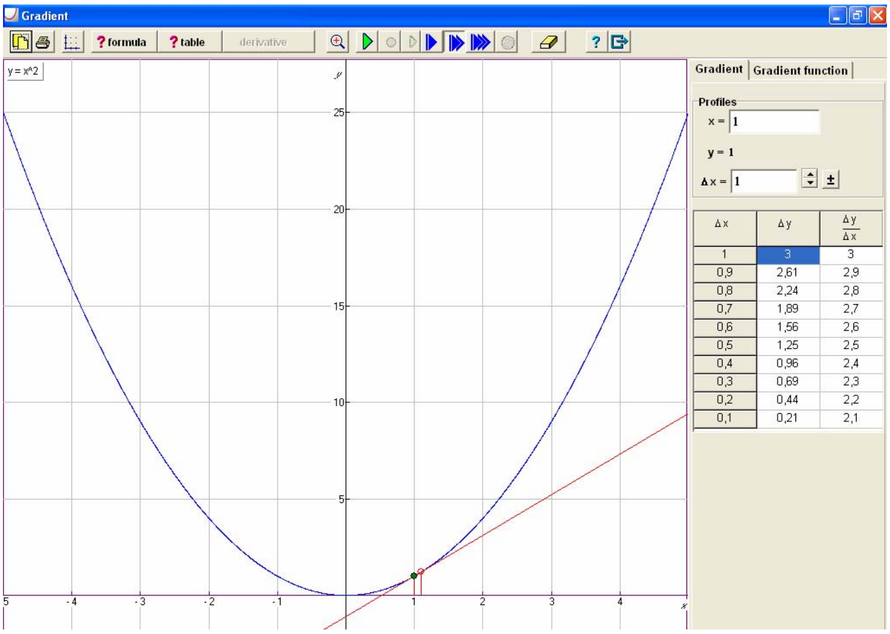


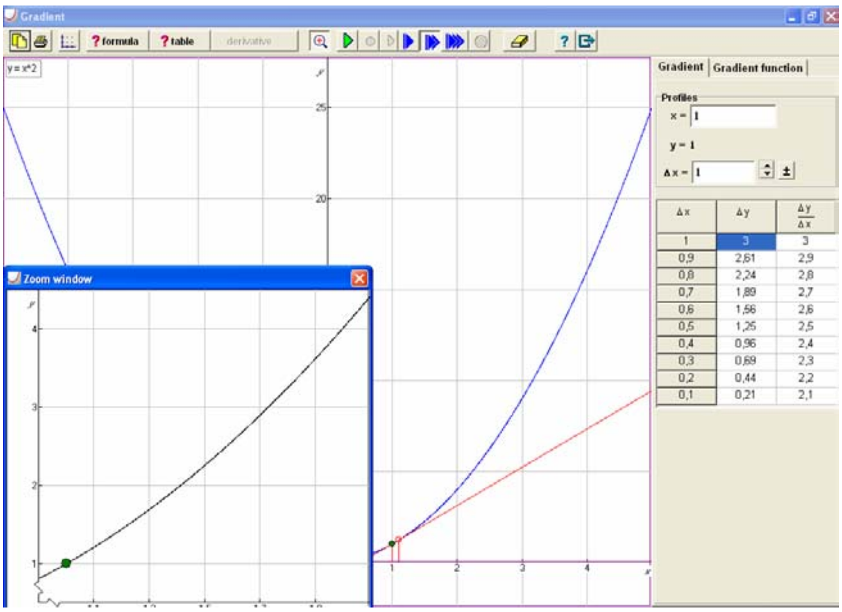
Figura 22



Δx	Δy	Δy/Δx
1	3	3
0,9	2,61	2,9
0,8	2,24	2,8
0,7	1,89	2,7
0,6	1,56	2,6
0,5	1,25	2,5
0,4	0,96	2,4
0,3	0,69	2,3
0,2	0,44	2,2
0,1	0,21	2,1

Figura 23

Cliccando sul bottone che richiama una lente con sopra disegnato un segno "+" è possibile avere un'immagine ingrandita (per default) sul fenomeno osservato (vedere figura 24).



Δx	Δy	Δy/Δx
1	3	3
0,9	2,61	2,9
0,8	2,24	2,8
0,7	1,89	2,7
0,6	1,56	2,6
0,5	1,25	2,5
0,4	0,96	2,4
0,3	0,69	2,3
0,2	0,44	2,2
0,1	0,21	2,1

Figura 24

Attività di questo tipo, effettuate con diverse funzioni, dovrebbero aiutare a evidenziare il punto di vista locale della derivata di una funzione in un punto, come valore della pendenza della funzione lineare che meglio approssima la funzione nel punto. Il passaggio all'aspetto globale di derivata vista essa stessa come una funzione che associa a ogni x il valore della pendenza della funzione lineare che meglio approssima la funzione f in x può essere favorito da attività svolte nel modulo "Gradient Function". Mediante esso, Graphic Calculus determina il rapporto incrementale $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, con h fissato e scelto dall'utente. Tale valore è un'approssimazione della pendenza della funzione lineare che meglio approssima f nel punto $(x, f(x))$. Il software quindi calcola diverse pendenze in base al valore di h assegnato dall'utente e traccia il grafico costituito dai punti $\left(x, \frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right)$ che è, per quanto detto, un'approssimazione del grafico della funzione derivata di f, dipendente da x e, in particolare, h. Nella figura 25 si può osservare il risultato finale di un'animazione: come è possibile vedere, aspetti grafici, numerici e formali sono contemporaneamente accessibili all'utente.

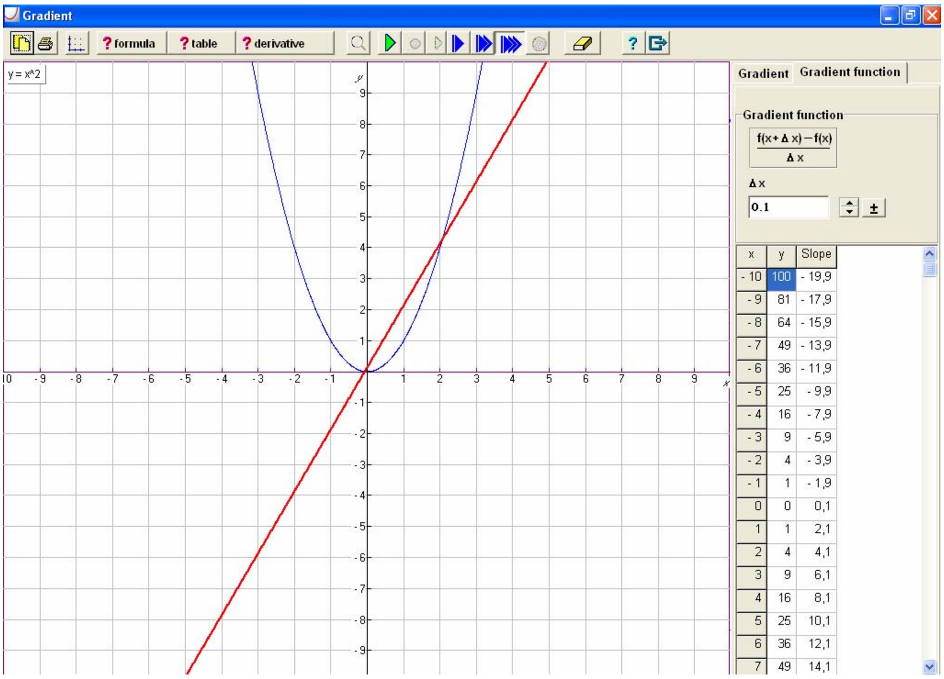


Figura 25

È possibile effettuare diverse attività, che vanno dalla semplice osservazione e descrizione di ciò che accade sullo schermo, con successiva sistemazione mediante discussioni matematiche guidate dall'insegnante, ad attività più raffinate, rivolte a studenti di triennio di liceo, ai quali si chiede di congetturare, a partire da ciò che si osserva sullo schermo, la formula della derivata di una funzione e poi di verificare la correttezza della congettura prodotta mediante il calcolo formale della formula della derivata.
Anche il modulo "Area" si distingue in due parti: "Area" e "Area function", che consentono di lavorare sulla dinamica "locale – globale", molto importante per la comprensione degli elementi fondamentali del *Calculus*, in modo analogo a quanto visto per i moduli "Gradient" e "Gradient function".
Con l'opzione "Area" è possibile calcolare il valore approssimato dell'area sottesa al grafico di una funzione che assume, in un determinato intervallo, valori positivi (figura 26).

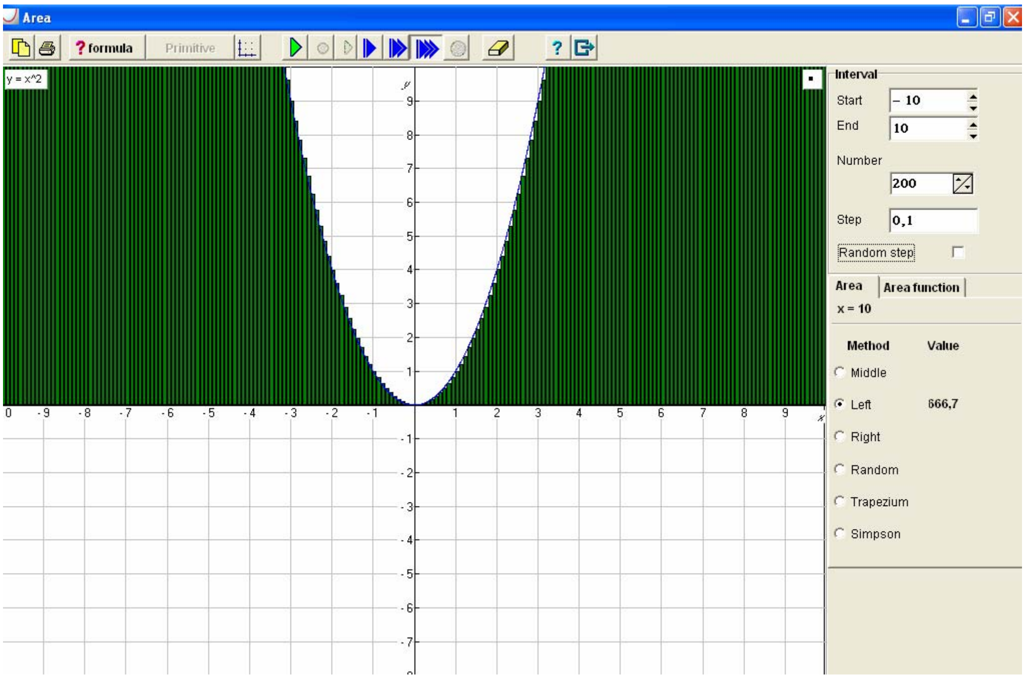


Figura 26

Nella figura 26 si è scelto di approssimare, con il metodo dei rettangoli, l'area sottesa al grafico di $f(x) = x^2$ nell'intervallo I = [– 10 ; 10] con incremento 0,1 prendendo come altezza dei rettangoli il valore della funzione nell'estremo sinistro dei vari intervalli in cui è stato suddiviso I.

Si tenga presente che il calcolo tiene in considerazione il segno della funzione: ciò significa che l'integrale definito di una funzione che assume valori negativi è negativo: nel disegno questo fenomeno è evidenziato dall'uso di un colore rosso per i valori negativi e verde per i positivi. Per esempio, nella figura 27, il valore dell'integrale è negativo e i rettangoli sottesi alle parti di grafico che hanno ordinate positive sono verdi, gli altri sono rossi (naturalmente questa distinzione si perde nella stampa in bianco e nero, ma è ben visibile sullo schermo del computer).

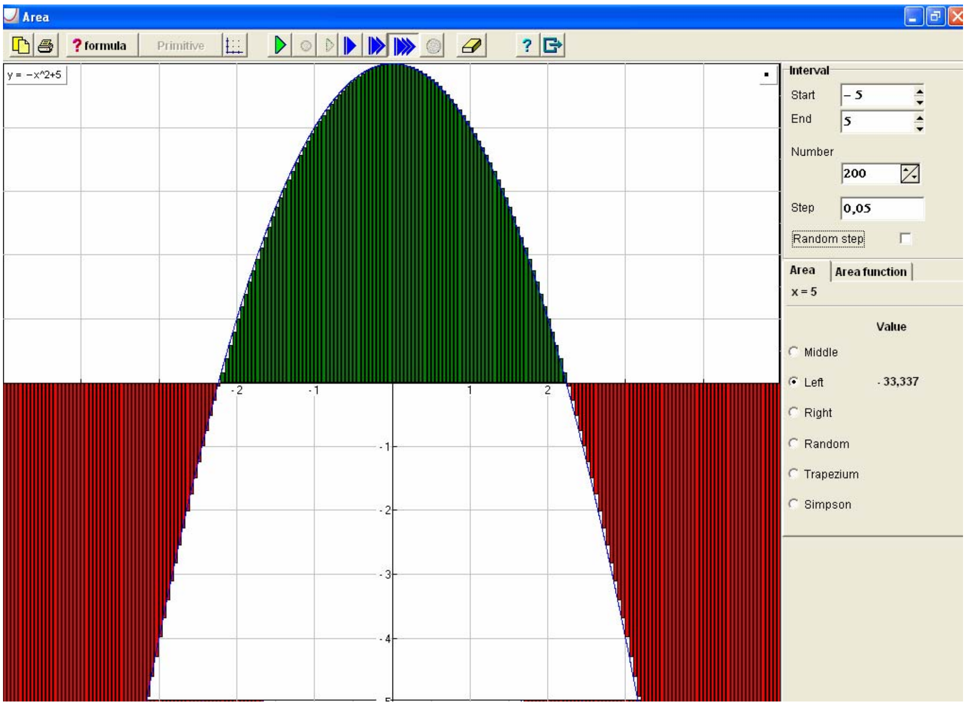


Figura 27

Con l'opzione "Area function", viene disegnato, in un intervallo $[a, b]$ un insieme di punti $(x, A(x))$ aventi per ascissa x e per ordinata un valore approssimato dell'integrale definito $\int_a^x f(t)dt$ con x che viene incrementato, a partire da a, di un passo ("Step") scelto dall'utente; più precisamente, l'utente può agire su due dei tre parametri, intervallo, passo e numero di passi, che sono legati dalla relazione: $\text{numero di passi} = \dfrac{\text{ampiezza intervallo}}{\text{passo}}$.

Il grafico che si ottiene è quello della primitiva F di $y = f(x)$ tale che $F(a) = 0$.
Per avere una discreta immagine del grafico è necessario che il numero di passi (ossia il numero di punti del grafico) sia pari almeno a 30.
Nella figura 28 viene riportato il grafico della funzione $y = \sin x$ nell'intervallo [– 3, 14 ; 3,14] e quello della sua primitiva $F(x)$ tale che $F(– 3, 14) = 0$ per un numero di passi uguale a 628.

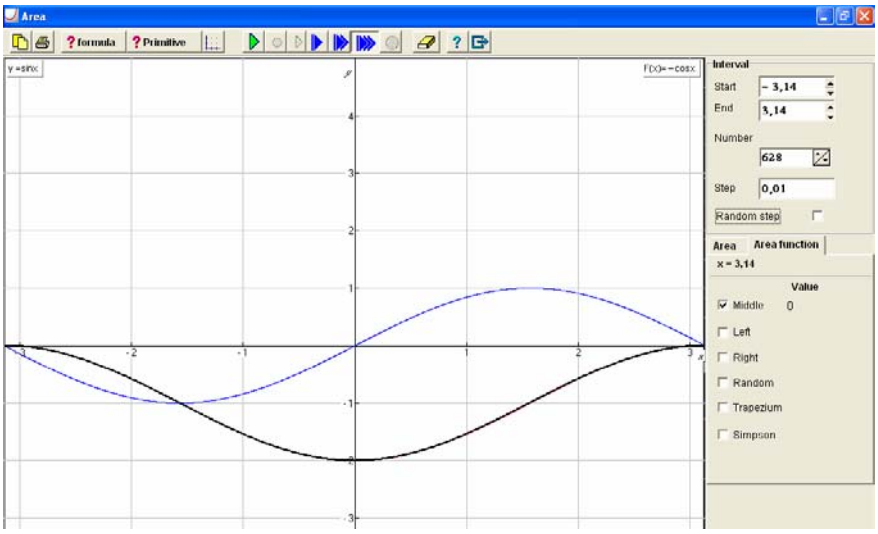


Figura 28

È possibile assegnare agli studenti attività in cui si richieda di congetturare la formula della funzione primitiva della funzione assegnata, facendosi aiutare da quello che osservano sullo schermo. Gli studenti possono verificare la correttezza della congettura cliccando sul bottone "Primitive" e scrivendo, nell'apposito spazio, quella che ritengono essere la formula della primitiva F della funzione f tale che $F(a) = 0$ (avendo avuto cura di deselezionare l'opzione"Modify function", nel caso comparisse in essa un segno di spunta). I tal modo è possibile confrontare i grafici della funzione primitiva definita dall'utente della funzione primitiva come è stata calcolata da Graphic Calculus.
È anche possibile addizionare un'opportuna costante alla primitiva in modo tale che la funzione $y = F(x)$ assuma un valore voluto in un certo punto x.

Considerazioni finali
Ho iniziato l'anno passato a effettuare alcune delle attività che ho presentato in questo articolo con Graphic Calculus. In questo anno scolastico la mia scuola ha acquistato una licenza illimitata di TI InterActive! che, quindi, è stato fornito anche per l'uso personale a casa a tutti gli studenti delle mie tre classi prima, seconda e terza liceo scientifico (sperimentazione PNI). La possibilità per gli studenti di poter lavorare non solo nei piccoli gruppi in classe su fogli di lavoro preparati da me, ma di poter riflettere sul lavoro svolto in classe e proseguirlo anche individualmente a casa, con uno strumento potente e flessibile come TI InterActive!, mi sembra che stia producendo risultati assolutamente confortanti e significativi. Stanno però emergendo alcuni problemi particolarmente interessanti, inattesi e per questo degni di riflessione a livello di ricerca didattica ai quali desidero accennare.
La prima considerazione è di carattere molto generale e contiene spunti speculativi a mio avviso molto intriganti, sui quali ho avviato una riflessione che spero non si riveli sterile, ma possa essere foriera di risultati ricchi e significativi per la ricerca in educazione matematica. Ciò che emerge nei comportamenti degli studenti che eseguono le attività proposte, è la difficoltà nel passare da aspetti globali ad aspetti locali. La mia idea era che le funzionalità e le caratteristiche di software come Graphic Calculus e TI InterActive!, che qui ho presentato, potessero consentire all'insegnante e agli studenti di gestire tranquillamente la delicata dinamica tra locale e globale che caratterizza lo studio del *Calculus*. Per esempio, la rettificazione locale con le funzioni di zoom e la piattezza locale avrebbero dovuto naturalmente evidenziare gli aspetti locali dei concetti di derivabilità e continuità, mentre la funzione gradiente (o la tangente che varia con continuità sulla curva) e l'immagine del tracciare un grafico senza staccare la matita dal foglio avrebbero dovuto evidenziare in modo naturale gli aspetti globali della funzione derivata e delle funzioni continue su un intervallo. Invece gli studenti dimostrano di avere fortissime difficoltà soprattutto con quelli che sono gli aspetti locali del *Calculus*[10]. È probabile che tale difficoltà non sia superabile con attività che insistano sugli aspetti visivo – percettivi, ma che sia gestibile solo con il formalismo. D'altra parte, qual è, se ve ne è una, l'intuizione del continuo? È quella degli intervalli inscatolati dell'analisi classica che

[10] Con il gruppo di Torino coordinato da Ferdinando Arzarello e, in particolare, con Ornella Robutti e Francesca Ferrara, stiamo analizzando i molti dati che abbiamo ottenuto con varie videoregistrazioni di attività svolte nelle mie e in altre classi. Parte di queste osservazioni verranno presentate e commentate nell'ambito dei lavori della prossima conferenza *PME* che si svolgerà in Australia nell'estate del 2005.

"catturano" un punto, oppure quella dell'analisi non standard che porta "alla fine" a un qualcosa che è più vicino agli evanescenti di Newton e Leibniz? E la rettificazione locale, quale delle due immagini favorisce? Qual è la relazione di questa immagine, se essa esiste, con il formalismo dell'analisi classica, che è quello che in genere proponiamo nella sistemazione delle conoscenze dell'analisi matematica?

La seconda considerazione è più specifica: la piattezza locale non consente di catturare la discontinuità puntuale. Infatti una funzione a cui manca un punto, oppure una funzione che ha i limiti sinistro e destro uguali, ma che è definita in x_0 con un valore diverso da questi limiti, appare piatta, ma non è continua in x_0: è discontinua e la discontinuità non è eliminabile.

Queste considerazioni, lungi dal far perdere valore e significato alle attività che ho presentato in questo articolo, in particolare all'uso delle nuove tecnologie per un approccio significativo ai concetti fondanti del *Calculus*, fanno capire che un approccio percettivo – motorio non può, in nessun caso, sostituire completamente il formalismo. Ciò da cui dovremmo difenderci e da cui dovremmo fuggire è il formalismo come assenza o evaporazione di significato, non certo il formalismo come condensazione di esperienze significative in segni sui quali si possa operare acquisendo in tal modo la capacità di costruire nuovi significati e nuove astrazioni.

Tralascio ulteriori speculazioni sulle quali forse è bene sospendere la parola per poter riflettere meglio e passo a una vera conclusione che lascio alle parole di David Tall che, come testimonia anche la bibliografia, è stato il maggiore ispiratore di questo mio intervento.

I reported how the use of local straightness and visual ideas of area can be cognitive roots that are foundational in building an embodied understanding of the calculus, taking the ideas to a stage where, given careful guidance, ideas can be motivated that are part of the formal theory of differentiation, continuity and integration. To do this requires more than mathematics and more than a knowledge of cognitive growth. It requires a special approach to mathematical thinking that supports the concept imagery of the biological brain by interaction with a computational computer to produce a versatile mathematical mind.[11] *David Tall* (Tall, 2000).

[11] Abbiamo visto come l'uso della rettificazione locale e delle immagini relative al concetto di area possano svolgere il ruolo di radici cognitive fondamentali nella costruzione di significati degli oggetti del Calculus fortemente radicati nell'esperienza corporea, raggiungendo uno stadio in cui, prestando particolare attenzione, quelle idee possono diventare parte della teoria formale della derivabilità, continuità e integrabilità. Fare ciò comporta qualcosa in più della matematica o della conoscenza delle problematiche dell'evoluzione cognitiva. Richiede un

Bibliografia

DeMarois, P., McGowen M. & Tall, D.: 2000, Using the Function Machine as a Cognitive Root for building a rich concept image of the Function Concept, *Proceedings of PME-NA*, 1, 247-254, disponibile all'indirizzo web http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2000e-functlon-theory.pdf

Paola, D.: 2001, 'Nuove tecnologie e nuova scuola', in B. D'Amore (editor), *Didattica della matematica e Rinnovamento curricolare* (Atti del convegno di Castel San Pietro Terme), 81–93, disponibile all'indirizzo web: http://www.matematica.it/paola/Articolo%20Castel%20San%20Pietro.pdf

Paola, D.: 2003, Introduzione al concetto di funzione in un primo anno di scuola secondaria, *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, v. 26 B, 548 – 575.

Piez, C., Smith, D. & Tall, D., (in preparazione for *Research in Technology in Teaching and Learning Mathematics*), Technology and Calculus, disponibile all'indirizzo web http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2002z-tech-calc-smith-piez.pdf .

Tall, D.: 1989 Concept Images, Generic Organizers, Computers & Curriculum Change, For the Learning of Mathematics, 9,3 37-42, disponibile all'indirizzo web http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1989e-conim-genorg-flm.pdf .

Tall, D.: Biological Brain, Mathematical Mind & Computational Computers (how the computer can support mathematical thinking and learning). In Wei-Chi Yang, Sung-Chi Chu, Jen-Chung Chuan (Eds), *Proceedings of the Fifth Asian Technology Conference in Mathematics, Chiang Mai*, Thailand (pp. 3–20). ATCM Inc, Blackwood VA. ISBN 974-657-362-4, disponibile all'indirizzo web http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2000h-plenary-atcm2000.pdf .

---

particolare approccio al pensiero matematico che aiuta le immagini mentali prodotte dal nostro cervello interagendo con tecnologie informatiche per produrre una mente matematica flessibile e versatile.